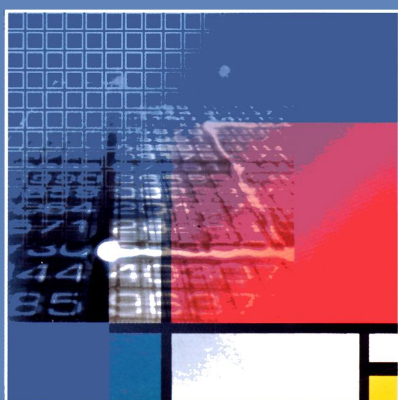
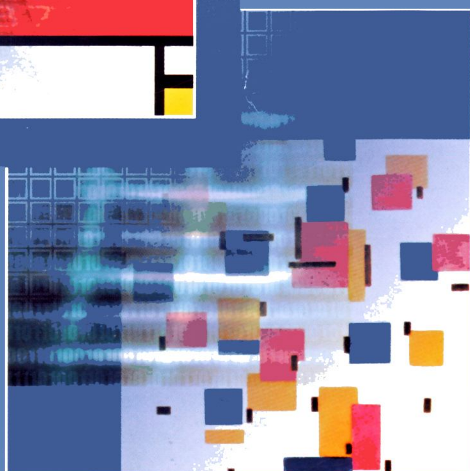
MATEMATIKA 12

MOKYTOJO KNYGA







MATEMATIKA 12

MOKYTOJO KNYGA

TEV

VILNIUS 2004

UDK 372.851
Ma615

Darbo vadovas *Vilius Stakėnas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė, Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Akvilė Nemanienė, Inga Paukštienė, Daiva Sniečkutė, Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Laimutė Ališauskienė, Nijolė Drazdauskienė, Loreta Giriūnienė*

Korektorė *Irena Muzikevičiūtė*

Konsultantas *Elmundas Žalys*

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

2004 05 04. 19 sp. l. Užs. Nr. 1329
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius
Spausdino UAB „Sapnų sala“,
S. Moniuškos g. 21, LT-08121 Vilnius

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955-491-64-7

TURINYS

PRATARMĖ

Mieli mokytojai,

jūs geriausiai žinote, kuo ypatingas mokymasis paskutinėje mokyklos klasėje. Matyt, tais spiečiais vilčių, lūkesčių ir jausmų, kurie, rodos, šlama, krebžda ir siaučia net ir gryniausioje pamokos tyloje. Ir dar tie egzaminai, būtinumas jiems tinkamai pasirengti...

Kaip rengtis: kartoti žinias ir spręsti, spręsti, spręsti?

To, žinoma, reikia. Tačiau nebūtų gerai, jeigu matematikos mokymasis paskutinėje klasėje virstų vien nuolatinėmis treniruotėmis. Nes XII klasėje dėstoma matematika turi keletą ypatingų bruožų, kuriuos svarbu pajusti ir suvokti. Visų pirma — tai savotiškas „atsivėrimas pasauliui“.

Iš tiesų — daugelis ankstesnėse klasėse nagrinėtų matematikos temų kelia tam tikrą „siaurumo“, „ribotumo“ jausmą: trikampio ploto formulė tinka tik trikampiui; išnagrinėjome laipsninių, trigonometrinių ir rodiklinių funkcijų savybes, bet dauguma funkcijų nėra nei šitokios, nei anokios...

O XII klasės matematikos skyriuose — išvestinių, integralų, tikimybių ir statistikos — nagrinėjami universalūs metodai, kurių taikymo galimybės daugiausia priklauso tik nuo mūsų įžvalgos ir išradingumo.

Skaičiuoti išvestines, integralus, vidurkius ir dispersijas nesudėtinga išmokti „greituoju būdu“ — įvaldant formalias taisykles ir formules. Tačiau turbūt naudingiau — „lėtuoju“, mokantis tarsi patiems atrandant. Nes tai, kas paties žmogaus suvokta, atrasta, tarsi palieka sąmonėje išmintą takelį, kuriuo prireikus vėl bus galima eiti. O suvokimas visada prasideda nuo įsižiūrėjimo, įsivaizdavimo, nelabai tikslių, tačiau ryškių vaizdinių.

Diferencijuojamos funkcijos grafikas tarsi sudarytas iš mažyčių atkarpėlių? Žinoma, kad tai netiesa. Tačiau vistiek leidžia pajusti tą tiesą, kurią galima išreikšti tik matematine kalba.

Šioje knygoje komentuojant vadovėlio skyriuose išdėstytą medžiagą, dažnai stengtasi pabrėžti tokių pradinių vaizdinių reikšmę. Kai kam jų galbūt ir užteks, kai kas pajutęs jų nepakankamumą įvertins matematinio griežtumo ir matematinės kalbos būtinumą...

Taigi matematikos mokymasis paskutinėje klasėje — naujų dalykų suvokimas, kartojimas ir treniruotė.

Tikiu, kad mokytojų patirtis padės surasti optimalią šių trijų elementų dermę.

V. Stakėnas

I. IŠVESTINĖS

1. RIBOS IR IŠVESTINĖS

1.1. Funkcijos ribinės reikšmės

Matematikoje ribas sutiksi kiekviename žingsnyje. Ir dvyliktokams tai nebėra naujiena. Nagrinėdami sekas, ribas suvokėme kaip skaičius, ties kuriais „kaupiasi" sekos nariai su dideliais eilės numeriais. Tačiau iš tiesų su ribomis susidūrėme dar anksčiau. Tiesą sakant — pačioje matematikos vadovėlio 11 klasei pradžioje. Kas yra, pavyzdžiui, skaičius $\sqrt{2}$? Juk tai ne kas kita, kaip tam tikros dešimtainių trupmenų sekos riba! Naujiena, kad dabar ribos sąvoką siesime nebe su sekomis, bet su funkcijomis. Tačiau ir tai nėra visiška naujiena! Prisiminkime, pavyzdžiui, kaip apibrėžėme rodiklinę funkciją $f(x) = 2^x$. Įsivaizdavome, kad atidedame šios funkcijos grafiko taškus, kai x racionalusis skaičius, o po to įsivaizdavome, kad šiuos taškus sujungiame kreive. Sujungę tarėme, kad šitaip apibrėžėme rodiklinės funkcijos reikšmes su visomis x reikšmėmis, ne vien tik su racionaliosiomis. Ką gi iš tiesų padarėme? Apibrėžėme rodiklinės funkcijos reikšmes, kai x yra iracionalieji skaičiai, kaip reikšmių su racionaliaisiais x ribas!

Taigi ribos yra daugelio mūsų matematinių sąvokų pamatas. Tiesa, naudojantis daugeliu sąvokų visai nebūtina prisiminti, kas sudaro jų esmę. Daugybė žmonių puikiai vairuoja automobilius nenumanydami, kaip veikia vidaus degimo variklis, daugybė žmonių puikiai moka dirbti kompiuteriu nieko neišmanydami nei apie mikroschemas, nei apie loginę algebrą. Ir tegu! Tačiau kai žinai arba bent jau jauti, kaip iš tikrųjų yra, argi neįgyji tam tikro tvirtumo bei pasitikėjimo savimi?

Matematinės ribų teorijos šiame skyrelyje nėra. Pakaks, jei moksleiviai susidarys intuityvų ribos vaizdinį, kuriuo galės pasiremti tie, kas mokysis matematikos universitetuose.

Ribos sąvoką bandoma paaiškinti tradiciniu būdu — remiantis grafikais. Grafikas įsiterpia į ribos sąvokos kontekstą ir gali atrodyti, kad yra būtinas nagrinėjant ribas. Tačiau galima pabandyti paaiškinti ribos esmę ir be jo. Įsivaizduokime, pavyzdžiui, funkciją $f(x)$ kaip gausybę „strėlių", jungiančių apibrėžimo ir reikšmių sričių skaičius (skaičių tiesių taškus), žr. 1 pav. Ką reiškia, kad funkcijos $f(x)$ ribinė reikšmė, kai x artėja prie x_0, lygi y_0? Sujunkime taškus, atitinkančius x_0 ir y_0 tiese ir artinkime x prie x_0 iš kairės arba iš dešinės. Strėlė, jungianti x ir $f(x)$, slinksis link tiesės, artės, tarsi negalėdama atsispirti jos traukai, tarsi siekdama su ta tiese sutapti, žr. 2 pav. Galima pasiūlyti moksleiviams įsivaizduoti, kaip turėtų elgtis strėlė, kad $f(x)$ neartėtų prie y_0, kai x artėja prie x_0.

Remiantis tokiais piešiniais galima interpretuoti ir pagrindinę ribos apibrėžimo sąlygą:

kiekvienam $\varepsilon > 0$ atsiras $\delta > 0$, kad su visais x, kuriems

$$|x - x_0| < \delta, \quad \text{bus} \quad |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Ją galima paaiškinti taip: paėmę reikšmių srities tiesėje atkarpą CD, kurią taškas y_0 dalija pusiau, kad ir kokia maža ji būtų, visada galėsime rasti apibrėžimo srities tiesėje atkarpą AB su vidurio tašku x_0, kad bet kuri strėlė, jungianti atkarpos AB tašką su $f(x)$ atitinkančiu tašku, tilps trapecijoje $ABCD$.

Skyrelyje taip pat pateikiamos funkcijų sumos, skirtumo, sandaugos ir dalmens ribų savybės bei keletas pavyzdžių. Kai kam gali susidaryti įspūdis, kad, pavyzdžiui, surasti funkcijų sumos ribinę reikšmę reiškia tą patį, kaip surasti funkcijų sumos reikšmę. Galima apsiriboti pastaba, kad funkcijos gali būti neapibrėžtos, kai $x = a$, o ribinės reikšmės gali egzistuoti. Gebantiems geriau įsigilinti galima pasiūlyti panagrinėti funkcijas $f(x)$ ir $g(x)$, jų sumas ir ribines reikšmes, kai

$$f(x) = [x], \quad g(x) = \{x\}$$

arba

$$f(x) = [x], \quad g(x) = 2\{x\}.$$

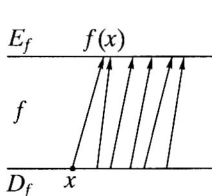
Įsivaizduojame ir žinome:

kaip „elgiasi" funkcija arti taško, prie kurio artėjant egzistuoja ribinė reikšmė;

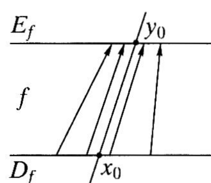
kaip gali „elgtis" funkcija tada, kai ribinė reikšmė neegzistuoja;

pagrindines funkcijų ribų savybes.

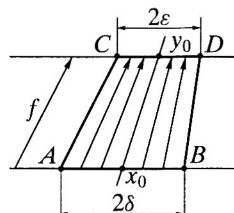
Mokame nustatyti iš funkcijos grafiko, prie kurių taškų artėjant ribinė reikšmė egzistuoja, prie kurių — ne.



1 pav.



2 pav.



3 pav.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Prieš pradedant šią temą, pravartu pakartoti skaičiaus modulio sąvoką, o taip pat nelygybių $|x - a| < b$ ir $|x - a| > b$ sprendimą. Reikėtų akcentuoti šių nelygybių sprendinių geometrinę prasmę, t. y. sprendinius suvokti kaip skaičių ašies taškus x, nuo taško a nutolusius mažiau (daugiau) kaip b.

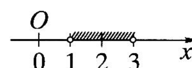
Teisingam funkcijos ribinės reikšmės vaizdiniui susidaryti svarbu išnagrinėti 1 ir 4 pavyzdžius, taip pat vertėtų atlikti bent vieną 3 pratimo užduotį. Ribų skaičiavimui mokyti daug laiko neverta sugaišti. Pakaks, jei panagrinėsime vieną kitą 7 bei 8 ar 9 pratimų užduotį.

1. a) **A**, **B**, **C**; b) **A**, **B**; c) **B**, **D**; d) **A**, **C**.

Pastabos. 1) Nagrinėjant šį pratimą naudinga ne tik nurodyti, kuriais atvejais lygybės teisingos, bet ir išsiaiškinti, kodėl kitais atvejais jos nėra teisingos. Pavyzdžiui, **D** atveju $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, o **C** ir **D** atvejais, argumentui x artėjant prie 0, funkcija ribos iš viso neturi.

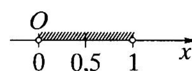
2) Išnagrinėjus šį uždavinį, pravartu padaryti išvadą: *Jei x artėjant prie a funkcija $f(x)$ turi ribą, tai ši riba yra vienintelė.*

2. a) Sprendžiame nelygybę $|x - 2| < 1$. Kai $x \geqslant 2$, tai $x - 2 < 1 \Rightarrow x < 3$; kai $x < 2$, tai $-(x - 2) < 1 \Rightarrow x > 1$. Taigi $1 < x < 3$.



Analogiškai randame, kad:
$|f(x) - 2| < 0{,}5$, kai $1{,}5 < x < 2{,}5$;
$|f(x) - 2| < 0{,}1$, kai $1{,}9 < x < 2{,}1$.

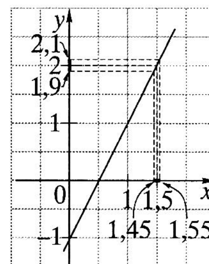
b) Sprendžiame nelygybę $|-2x + 1| < 1 \Rightarrow -1 < -2x + 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$ (arba: $|-2x + 1| < 1 \Rightarrow 2|x - 0{,}5| < 1 \Rightarrow |x - 0{,}5| < 0{,}5 \Rightarrow -0{,}5 < x - 0{,}5 < 0{,}5 \Rightarrow 0 < x < 1$).



Analogiškai randame, kad:
$|f(x) + 1| < 0{,}5$, kai $0{,}25 < x < 0{,}75$;
$|f(x) + 1| < 0{,}1$, kai $0{,}45 < x < 0{,}55$.

3. a) Sprendžiame nelygybę: $|2x - 1 - 2| < 0{,}1 \Rightarrow 1{,}45 < x < 1{,}55$. Pažymėkime sprendinius brėžinyje (žr. paraštėje).

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $1{,}8 < x < 2{,}2$; c) $5{,}8 < x < 6{,}2$; d) $-0{,}55 < x < -0{,}45$.



4. a) **A**, **C**; b) **A**; c) **B**, **D**.

Pastaba. Reikėtų atskirai aptarti punktuose **B** ir **D** pavaizduotų funkcijų grafikus ir paaiškinti, kad **B** atveju argumentui x artėjant prie a, funkcijos reikšmės neaprėžtai didėja, o atveju **D** — neaprėžtai mažėja.

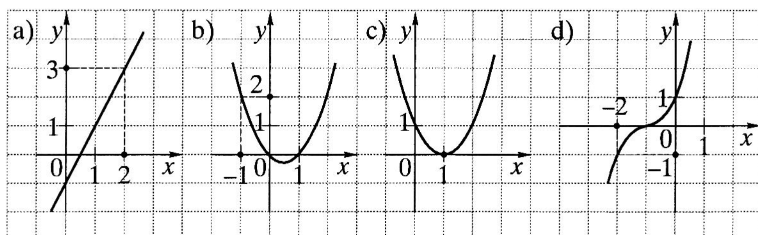
5. Pavyzdžiui:
a) $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = 3\sin\frac{\pi x}{2}$; b) $f(x) = x - 1$, $f(x) = -\cos x$;
c) $f(x) = 2 - x$, $f(x) = 2 + \lg(x + 1)$; d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = -e^{x+1}$.

6. *Nurodymas.* Ieškant funkcijų ribinių reikšmių patartina bent pradžioje, kaip ir skyrelyje pateiktuose pavyzdžiuose, nuosekliai pagrįsti kiekvieną veiksmą.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x - 1) = \lim\limits_{x\to 2} 2x - \lim\limits_{x\to 2} 1 = \lim\limits_{x\to 2} 2 \cdot \lim\limits_{x\to 2} x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) 2; c) 0; d) -1.

Nubraižykime funkcijos grafiką:



7. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x+1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-1}{3x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x-4)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}2\cdot\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}3\cdot\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}4} = \frac{2\cdot 2-1}{3\cdot 2-4} = \frac{3}{2}$.

Analogiškai:

c) 2; d) 11.

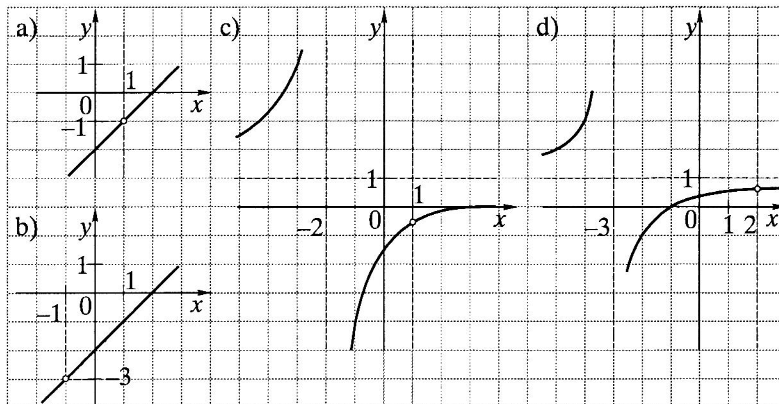
8. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$;

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(x-2) = -3$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{5}$.

Nubraižykime funkcijos grafiką:



9. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $-\frac{1}{4}$.

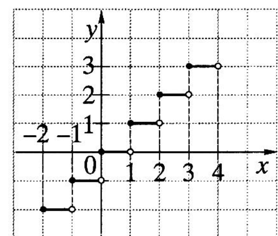
Nurodymas. Skaitiklį ir vardiklį padauginkite iš:

a) $\sqrt{x+3}+2$; b) $\sqrt{x+2}+2$; c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-2}$.

d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x+9}-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt[3]{x+9}-2\right)\left(\sqrt[3]{(x+9)^2}+2\sqrt[3]{x+9}+4\right)}{(x+1)\left(\sqrt[3]{(x+9)^2}+2\sqrt[3]{x+9}+4\right)} =$

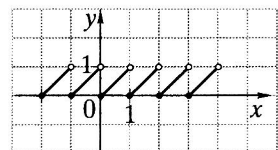
$\lim\limits_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt[3]{x+9}\right)^3-2^3}{(x+1)\left(\sqrt[3]{(x+9)^2}+2\sqrt[3]{x+9}+4\right)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+9)^2}+2\sqrt[3]{x+9}+4} = \frac{1}{12}$.

10. a) Nubraižykime funkcijos $f(x) = [x]$ grafiką (žr. paraštėje). Matome, kad ši funkcija įgyja reikšmę, lygią 1, kai $1 \leqslant x < 2$, ir reikšmę, lygią 2, kai $2 \leqslant x < 3$. Iš grafiko matome, kad funkcijos $[x]$ reikšmės neartėja prie jokio skaičiaus A, kai $x \to 2$. Formaliai tenka griebtis prieštaros. Tarkime, kad riba egzistuoja ir lygi A. Tada pakankamai dvejetui artimoms reikšmėms x_1 ir x_2 skirtumai $f(x_1) - A$ ir $f(x_2) - A$ yra kiek norint maži, taigi kiek norint mažas ir jų skirtumas $|f(x_1) - f(x_2)|$. Bet užtenka imti x_1 į dešinę nuo $x = 2$, o x_2 į kairę, ir tada tas skirtumas lygus 1. Prieštara.



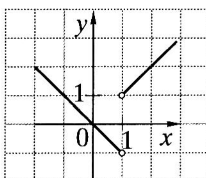
Galima galvoti ir kiek kitaip: x artėjant prie 2 ir būnant didesniam už 2, funkcijos reikšmės artėja prie 2, o būnant mažesniam už 2 — prie 1. Bendro ribinio taško nėra. Bet dėl suprantamų priežasčių vadovėlyje terminai „riba iš kairės" ir „riba iš dešinės" nenaudojami, nors jie ir pakankamai aiškūs.

b) Nubraižykime funkcijos $f(x) = \{x\} = x - [x]$ grafiką (žr. paraštėje). Įrodymas panašus į punkto a).



c) $f(x) = \frac{x|x-1|}{x-1} = \begin{cases}\frac{x(x-1)}{x-1}, & \text{kai } x > 1,\\ \frac{x(1-x)}{x-1}, & \text{kai } x < 1\end{cases} = \begin{cases}x, & \text{kai } x > 1,\\ -x, & \text{kai } x < 1.\end{cases}$

Taške $x = 1$ funkcija $f(x)$ neapibrėžta. Todėl grafikas atrodo taip:



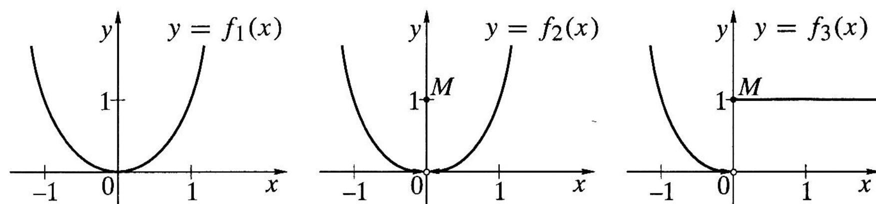
Įrodymas panašus į punkto a).

1.2. Tolydžios funkcijos

Skyrelio medžiagos esmė sutelkta pirmame brėžinyje. Aiškintis jį galima pradėti nuo klausimo: tarkime, taškas a priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai; ar visada funkcijos ribinė reikšmė, kai x artėja prie a, lygi funkcijos reikšmei šiame taške? Kuris iš trijų grafikų, kai $a = 0$, turi šią savybę, kurie neturi? Kaip atrodo funkcijos grafikas, neturintis šios savybės? Tarsi nutrūkęs. O turintis šią savybę — vientisas, susijęs. Tai visiškai geras ir pakankamas tolydžios bei netolydžios taške funkcijos vaizdinys. Toliau skyrelyje tolydumo sąvoka formalizuojama pasitelkiant ribas. Ar reikia jį aiškintis, ar apsiriboti tik tolydžios funkcijos vaizdiniu, susidarytu nagrinėjant grafikus — geriausiai nuspręs patys mokytojai.

Įsivaizduojame:
tolydžių funkcijų grafikus;
netolydžių funkcijų grafikus.

Mokame:
paaiškinti, kuo skiriasi tolydžios ir netolydžios funkcijos;
nustatyti iš grafiko, kuriuose taškuose funkcija yra tolydi, kuriuose ne.

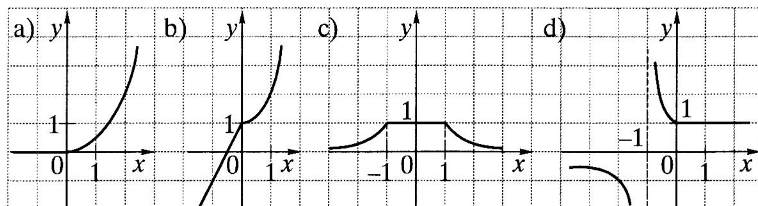


PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Nors vadovėlyje ir pateiktas tolydžiosios funkcijos apibrėžimas, tačiau mokiniams pakanka suvokti, kad tolydi funkcija yra tokia, kurios grafiką galima nubrėžti neatitraukiant pieštuko nuo popieriaus lapo.
Apie tolydumą taške x_0 kalbame tik tada, kai taškas x_0 yra apibrėžimo srities taškas. Jeigu taškas x_0 nepriklauso apibrėžimo sričiai, tačiau funkcija apibrėžta intervaluose $(x_0 - \varepsilon; x_0)$, $(x_0; x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tai funkcija taške $x = x_0$ yra trūki. Bet funkcija $f(x)$ gali būti trūki taške x_0 ir tada, kai taškas x_0 priklauso apibrėžimo sričiai.
Beveik visuose uždaviniuose reikalaujama nubraižyti funkcijų grafikus ir iš jų nustatyti, kuriuose taškuose funkcija yra tolydi. Logikos požiūriu — tai neteisinga: kaip braižyti grafikus mes tik tada ir sužinome, kai ištiriame funkcijos tolydumą. Taigi skyrelio pratimai skirti ne tiek tolydumo sąvokos nagrinėjimui, kiek grafikų braižymo įgūdžių priminimui. Vertėtų atlikti keletą 12, 13 ir 14 pratimų užduočių. Tiems, kuriems jos atrodo labai lengvos, — galima pasiūlyti panagrinėti 15–18 pratimus.

11. *Nurodymas.* Uždavinį galima spręsti panašiai, kaip skyrelio 1 pavyzdį.
a) $D_f = \boldsymbol{R}$. Sakykime, kad x_0 — bet kuris taškas iš apibrėžimo srities. Remdamiesi funkcijos tolydumo taške apibrėžimu ir ribų savybėmis, galime parašyti:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} 2x^3 = 2 \lim\limits_{x \to x_0} x \cdot \lim\limits_{x \to x_0} x \cdot \lim\limits_{x \to x_0} x = 2x_0^3 = f(x_0)$. Taigi funkcija $f(x)$ yra tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$.
Visai panašiai tolydumas visoje realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$ gali būti įrodytas b) ir d) punktuose.
c) Pastebėkime, kad taške $x = -1$ funkcija neapibrėžta (taigi nėra tolydi).
Kai $x_0 \neq -1$, tai $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x}{x+1} = \frac{3x_0}{x_0+1} = f(x_0)$. Taigi funkcija yra tolydi intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(-1; +\infty)$.
Beje, kai $x \to -1$, funkcijos reikšmės neaprėžtai didėja (artėjant prie -1 iš dešinės) ir neaprėžtai mažėja (artėjant prie -1 iš kairės).
Pravartu pastebėti, kad $\frac{3x}{x+1} = \frac{3x+3-3}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$. Taigi šios funkcijos grafiką galima gauti stumdant ir simetriškai atspindint hiperbolę $y = \frac{3}{x}$.

12.



Pastaba. Pratimuose a), b) ir d) taškas $x = 0$ ypatingas tuo, kad į kairę ir į dešinę nuo šio taško funkcija apibrėžiama skirtingomis formulėmis. Tačiau funkcijos grafikas „nenutrūksta“. Pratime c) funkcijos grafikas „sudurstytas“ taškuose $x = -1$ ir $x = 1$.

13. a) Taip; b) taip; c) taip; d) taip.

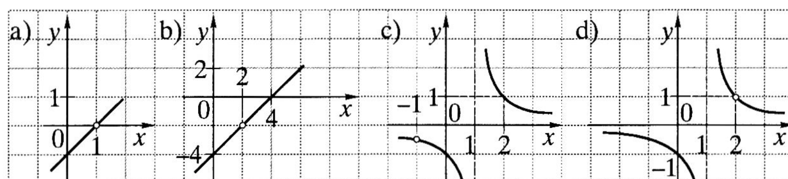
14. a) $D_f = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; joje $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1$.
Funkcija yra tolydi visoje D_f; trūki taške $x = 1$.

b) $D_f = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; joje $f(x) = \frac{x^2-6x+8}{x-2} = \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = x - 4$.
Funkcija yra tolydi visoje D_f; trūki taške $x = 2$.

c) $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$;
joje $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}$.
Funkcija trūki taškuose $x = -1$ ir $x = 1$.

d) $D_f = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$;
joje $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}$.
Funkcija trūki taškuose $x = 1$ ir $x = 2$.

Funkcijos $f(x)$ grafikas:



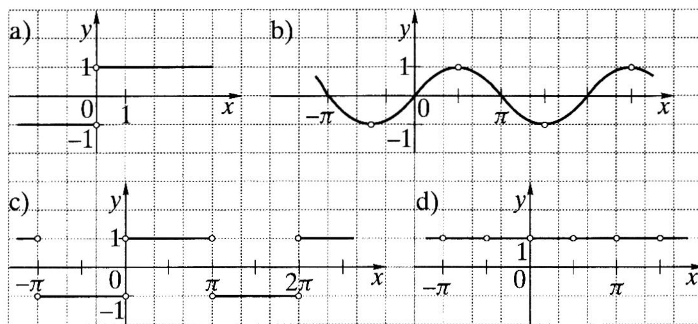
15. a) Funkcija apibrėžta ir tolydi intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(0; +\infty)$; taškas $x = 0$ yra trūkio taškas.

b) Funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$, išskyrus taškus $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (trūkio taškai); apibrėžimo srityje
$f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x = \sin x$.

c) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x} = \begin{cases} 1, & \text{kai } \sin x > 0, \\ -1, & \text{kai } \sin x < 0. \end{cases}$
Funkcija neapibrėžta (taigi trūki) taškuose $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

d) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$. Funkcija neapibrėžta (taigi trūki) taškuose $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Funkcijos $f(x)$ grafikas:



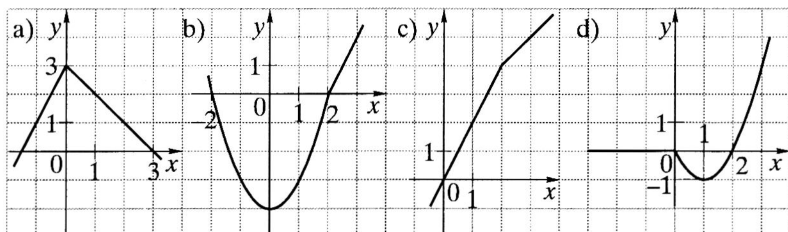
16. a) Funkcija $f(x) = \begin{cases} 2x + k, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 3 - x, & \text{kai } x > 0 \end{cases}$ taškuose $x \neq 0$ tolydi, o taške $x = 0$ bus tolydi, kai $2x + k = 3 - x$, t. y. $k = 3$.

b) Skaičių k randame iš lygties $2^2 - 4 = 2 \cdot 2 + k$, $k = -4$.

c) Skaičių k randame iš lygties $2k = k + 2$, $k = 2$.

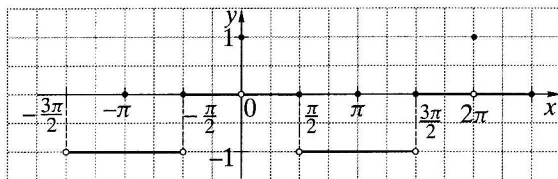
d) Iš lygties $k \cdot k = k^2 - 2k$ gauname $k = 0$.

Funkcijos $f(x)$ grafikas:

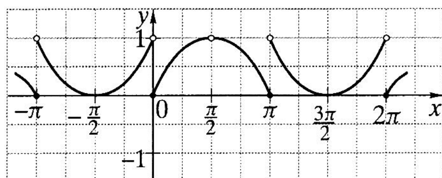


Pastaba. Sąlyga turėtų būti tokia: *Nubraižykite jos, su parinktuoju k, grafiką.*

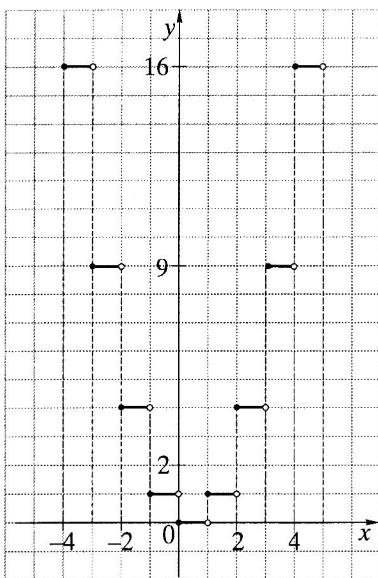
17. a) Funkcija $y = [\cos x]$, kaip ir funkcija $g(x) = \cos x$, yra periodinė bei lyginė. Mažiausias teigiamas duotos funkcijos periodas $T = 2\pi$.
Funkcija trūki taškuose ...; 0; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2π; $\frac{5\pi}{2}$; ...



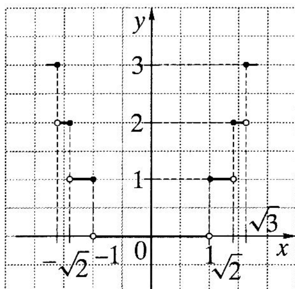
b) Prisiminkime: $\{x\} = x - [x]$, $0 \leqslant \{x\} < 1$. Funkcija $y = \{\sin x\}$ yra periodinė, $T = 2\pi$. Funkcija trūki taškuose ...; 0; $\frac{\pi}{2}$; π; 2π; $\frac{5\pi}{2}$; ...



c) Funkcija $y = [x]^2$ intervaluose $[k; k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, yra pastovi ir įgyja reikšmes, lygias k^2. Taškuose $k \in \boldsymbol{Z}$ duotoji funkcija yra trūki.



d) Kiekviename intervale $[\sqrt{k}; \sqrt{k+1})$, $k \in \boldsymbol{N}_0$ ($\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{N} \cap \{0\}$), funkcija $y = [x^2]$ yra pastovi ir įgyja reikšmę, lygią k. Funkcija yra lyginė; taškuose $\pm\sqrt{k}$, $k \in \boldsymbol{N}$, funkcija yra trūki.



18. a) Funkcija $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 3, & \text{kai } x > 0 \end{cases}$ taške $x = 0$ yra trūki;

b) funkcija $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 0, & \text{kai } x > 0 \end{cases} = 0$ visuose taškuose yra tolydi.

1.3. Funkcijos reikšmių pokyčiai

Vienuoliktos klasės vadovėlyje nagrinėdami funkcijas dažniausiai tyrėme „globalines“ funkcijų savybes: kur jos yra apibrėžtos, kokias įgyja reikšmes, kur didėja, mažėja, ar yra lyginės, nelyginės ir pan. Dabar sutelkiame dėmesį į funkcijos elgesį, kai nepriklausomas kintamasis įgyja reikšmes „arti“ pasirinktojo skaičiaus. Ribinės reikšmės, tolydumas — tai tokį „lokalinį“ („vietinį“) elgesį nusakančios sąvokos. Funkcijos pokyčių nagrinėjimas — tolesnis šio „vietinio“ elgesio tyrinėjimo žingsnis.

Aiškindami funkcijų reikšmių pokyčio sąvoką pabrėžkime, kad vieną funkcijos apibrėžimo srities tašką x_0 fiksuojame, apskaičiuojame atitinkamą funkcijos reikšmę, o po to pakeitę x_0 (padidinę ar sumažinę dydžiu Δx) tiriame, kiek pakito funkcijos reikšmė. Pabrėžkime, kad funkcijos pokytis $\Delta f(x_0)$ priklauso ir nuo to, kokį tašką x_0 fiksavome, ir kiek pakeitėme x_0 (t.y. kokį ėmėme Δx). Ši priklausomybė dažnai sudėtinga, tačiau ne visada. Pavyzdžiui, jeigu nagrinėsime tiesinę funkciją $f(x) = ax + b$, tai nesunkiai įsitikinsime, kad $\Delta f(x_0)$ tiesiog proporcingas nepriklausomo pokyčio $\Delta f(x_0)$ didumui. Kitoms funkcijoms tai nebėra teisinga, tačiau... Nagrinėdami 1 ir 2 skyrelio pavyzdžius įsitikiname, kad su mažais Δx ir sudėtingų funkcijų pokyčiai panašūs į tiesinių funkcijų pokyčius, t.y. kinta proporcingai Δx. Tai svarbi įžvalga, palengvinanti suprasti daugelį diferencialinio ir integralinio skaičiavimo teiginių. Funkcijos gali būti labai įvairios, „globalios“ jų grafikų savybės gali būti labai skirtingos, tačiau nagrinėjant jas vis arčiau pasirinkto taško jos vis labiau panėšėja į tiesines.

Suvokiame ir žinome:

nepriklausomojo kintamojo ir funkcijos reikšmių pokyčio apibrėžimus;

kad mažiems Δx funkcijos reikšmių pokyčio išraišką galima pakeisti paprastesne, duodančia tik nežymias skaičiavimo paklaidas.

Mokame:

užrašyti ir pertvarkyti funkcijos reikšmių pokyčio formulę, kai nurodyta funkcijos išraiška ir pasirinktas taškas;

apskaičiuoti funkcijos pokyčio skaitines išraiškas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

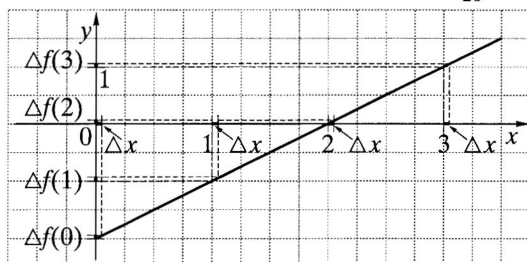
Pagrindinis skyrelio pratimų tikslas — funkcijos reikšmių pokyčių skaičiavimas. Todėl svarbiausia atlikti bent po kelias 20, 21, 23–25 pratimų užduotis.

19. a) 3; b) 0; c) 1; d) 4.

20. a) $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
Kai $x_0 = 1$, $\Delta x = 1$, tai $\Delta f(1) = f(1+1) - f(1) = f(2) - f(1)$.
Iš brėžinio randame, kad $f(2) = 4$, $f(1) = 2$. Tada $\Delta f(1) = 4 - 2 = 2$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai: b) 4; c) -2; d) -2.

21. a) $\Delta f(0) = f(0+0,1) - f(0) = f(0,1) - f(0) = \left(\frac{1}{2}\cdot 0,1 - 2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 - 2\right) = \frac{1}{20}$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai: b) $\frac{1}{20}$; c) $\frac{1}{20}$; d) $\frac{1}{20}$.

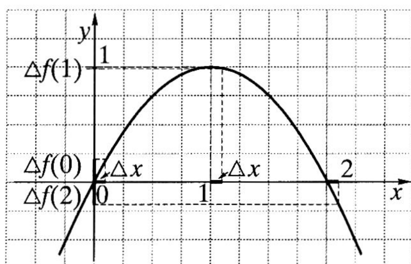
Pastaba. Pravartu pastebėti, kad tiesinės funkcijos pokyčiai, esant lygiems argumento pokyčiams, yra lygūs.



22. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \big(a(x_0 + \Delta x) + b\big) - (ax_0 + b) = a\Delta x$.
Pastaba. Ši lygybė rodo, kad tiesinės funkcijos $f(x) = ax + b$ pokytis, kai argumentas pakinta nuo x_0 iki $x_0 + \Delta x$, proporcingas argumento pokyčiui Δx, o proporcingumo koeficientas lygus a.

23. a) 0,19; b) $-0,01$; c) $-0,21$.

Nurodymas. Naudinga pradžioje nubraižyti grafiką ir iš jo pabandyti prognozuoti funkcijos pokyčius — jų ženklus, didumą.



24. 1) a) Akmuo bus 1 metro aukštyje, kai $h(t) = 1$. Taigi $1+12t-2t^2 = 1$, $t = 0$ ir $t = 6$. Vadinasi, akmuo 1 metro aukštyje yra pradiniu metimo momentu ir po 6 sekundžių.
b) Vertikaliai aukštyn sviesto akmens aukščio virš žemės priklausomybė nuo laiko nusakyta kvadratine funkcija, kurios grafikas — parabolė. Parabolės šakos nukreiptos žemyn. Jos viršūnės taško abscisė atitiks laiko momentą, kada akmuo bus aukščiausiai pakilęs, o ordinatė — didžiausią pakilimo aukštį. Taigi viršūnės abscisė $t_0 = \frac{6+0}{2} = 3$, o $h_0 = 1 + 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 19$. (Arba: $h(t) = 1 + 12t - 2t^2 = 1 - 2(t^2 - 6t + 9 - 9) = -2(t-3)^2 - 19$. Didžiausią reikšmę $h(t)$ įgyja, kai $t = 3$: $h(3) = 19$.)
c) $h(0) = 1$, $h(2) = 17$. Per pirmąsias dvi sekundes akmuo pakilo nuo 1 m iki 17 m.
d) $\Delta h(1) = h(1+2) - h(1) = 19 - 11 = 8$ (m).
e) $\Delta h(2) = h(2+2) - h(2) = 17 - 17 = 0$ (m). Per trečią sekundę akmuo nuo 17 m kilo iki 19 m, o po to krito iki 17 m.
f) Per pirmąsias 3 sekundes akmuo pasiekė didžiausią aukštį: $h(3) = 19$ (m). Apskaičiuokime, kaip pakito akmens padėtis per ketvirtą sekundę: $t_0 = 3$, $\Delta t = 1$, $\Delta h(3) = h(4) - h(3) = -2$ — tai reiškia, kad akmuo 2 metrus nukrito žemyn. Atsižvelgdami į tai, kad pradiniu laiko momentu $t = 0$ akmuo buvo 1 metro aukštyje, apskaičiuokime akmens nuskrietą kelią per 4 pirmąsias sekundes: $19 + 2 - 1 = 20$ (m).
2) Kadangi $h(7) = -13$, tai nuo metimo momento praėjus 7 sekundėms akmuo bus nukritęs (jis palies žemę momentu $t = 3 + \sqrt{9{,}5}$ nuo metimo pradžios). Nurodyta funkcija judėjimą aprašo tik intervale $[0; 3 + \sqrt{9{,}5}]$.

25. a) $-\frac{1}{101} \approx -0{,}1$; b) $\frac{1}{99} \approx 0{,}01$; c) $-\frac{1}{10010} \approx -10^{-5}$; d) $\frac{1}{9990} \approx 10^{-4}$.

26. a) Apskaičiuojame funkcijos $f(x) = x^2$ pokytį su $\Delta x > 0$:
$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.
Kadangi $\Delta x > 0$ ir $x > 0$ $\big(I = (0; +\infty)\big)$, tai $2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 > 0$. Taigi $\Delta f(x) > 0$ ir funkcija $f(x) = x^2$ intervale $(0; +\infty)$ yra didėjanti.
b) $\Delta f(x) = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - (x^2 - x) = \Delta x(2x - 1) + (\Delta x)^2 > 0$, kai $\Delta x > 0$ ir $x > 1$. Taigi $\Delta f(x) > 0$ ir funkcija $f(x) = x^2 - x$ intervale $(1; +\infty)$ yra didėjanti.
c) $\Delta f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \big(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\big) \cdot \Delta x$.
Kai $\Delta x > 0$ ir $x \geqslant 0$, tai $\big(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\big) \cdot \Delta x > 0$.
Taigi $\Delta f(x) > 0$ ir funkcija $f(x) = x^3$ intervale $[0; +\infty)$ yra didėjanti.
Didėjimas intervale $(-\infty; 0]$ išplaukia iš to, kad
$3x^2 + 3x \cdot \Delta x = 3x(x + \Delta x) > 0$, kai $x < 0$, o $0 < \Delta x < |x|$.
Beja, galima pasinaudoti ir funkcijos $f(x) = x^3$ nelyginumu. Taigi funkcija $f(x) = x^3$ intervale $(-\infty; +\infty)$ yra didėjanti.
d) $\Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) > 0$, kai $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, o $\Delta x > 0$ ir toks, kad $x + \frac{\Delta x}{2} < \frac{\pi}{2}$, t. y. $0 < \Delta x < \pi - 2x$;
e) $\Delta f(x) = \log_2(x + \Delta x) - \log_2 x = \log_2 \frac{x + \Delta x}{x} = \log_2 \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) > 0$, kai $x > 0$ ir $\Delta x > 0$;
f) $\Delta f(x) = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} > 0$, kai $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ir $0 < \Delta x < \frac{\pi}{2} - x$.

27. a) ir b) punktai įrodomi panašiai, kaip 26 pratime.
c) $\Delta f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) < 0$, kai $x \in (0; \pi)$, o $\Delta x > 0$ ir toks, kad $x + \Delta x < \pi$, t. y. $0 < \Delta x < \pi - x$;
d) $\Delta f(x) = 2^{-(x + \Delta x)} - 2^{-x} = -2^{-x}(1 - 2^{-\Delta x}) < 0$, nes $2^{-x} > 0$, o $1 - 2^{-\Delta x} > 0$, kai $x \in (-\infty; +\infty)$, $\Delta x > 0$;
e) $\Delta f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + \Delta x) - \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x + \Delta x}{x} = \log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) < 0$, kai $\Delta x > 0$ ir $x > 0$;
f) $\Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) < 0$, kai $\Delta x > 0$ ir $\frac{\pi}{2} < x + \frac{\Delta x}{2} < \frac{3\pi}{2}$, t. y. $0 < \Delta x < 3\pi - 2x$.
Pastaba. Sprendžiant 26 ir 27 uždavinius, mokiniams reikėtų paaiškinti, kad argumento pokytis Δx turi būti pakankamai mažas, t. y. toks, kad $x + \Delta x$ neišeitų iš nagrinėjamo intervalo. Todėl 26d), f) ir 27b), c), f) punktuose tenka Δx apriboti iš viršaus arba bent pasakyti „su pakankamai mažais $\Delta x > 0$“.

1.4. Funkcijos grafiko liestinės ir funkcijos išvestinė

Taip vyksta bet koks mokslinis tyrinėjimas: naujus reiškinius lyginame su gerai žinomais, ištyrinėtais, naujus sudėtingus objektus tiriame remdamiesi įprastiniais, gerai įvaldytais įrankiais.

Viso diferencialinio skaičiavimo esminė idėja irgi labai paprasta — sudėtingas funkcijas stengiamės tyrinėti lygindami jas su tiesinėmis, mažus jų grafikų fragmentus priartiname tiesių atkarpėlėmis. Taigi funkcijų grafikus — dažnai sudėtingas kreives — įsivaizduojame tarsi laužtes, sudarytas iš labai mažų grandžių — tiesių atkarpėlių. Tos tiesės — funkcijos grafiko liestinės. Pirmasis uždavinys — nuspręsti, kokias tieses protinga vadinti funkcijos grafiko liestinėmis. Intuityvią idėją galima apibūdinti taip: funkcijos grafiko liestinė nurodytame taške yra tokia tiesė, kuri arti šio taško beveik nesiskiria nuo paties grafiko. Tačiau matematiškai išreikšti teiginį „beveik nesiskiria" nėra paprasta. Tam pasitelkiamas „ribinis procesas": nagrinėjamos grafiko kirstinės, kurių lygtys

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \quad \text{arba} \quad \frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

užrašomos žinant koordinates dviejų funkcijos grafiko taškų $M_0(x_0, y_0)$ ir $M_1(x_1, y_1)$ ir artinant tašką M_1 prie M_0. Pirmą kartą remiantis ribomis galima tikėtis sužinoti kažką naujo, juk dažnai ribos sąvokos nauda galėjo atrodyti abejotina: ką laimime, jeigu funkcijos reikšmę taške pavadiname dar ir ribine reikšme?

Svarbu pabrėžti, kad apskaičiavus ribą

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

tarsi su mikroskopu nustatomas funkcijos grafiko elgesys arti taško x_0. Toji riba ir yra išvestinė. Galbūt verta sugretinti kirstinės ir liestinės lygtis, užrašytas taip:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \qquad \frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Verta sugretinti analizinę ir geometrinę išvestinės sąvokos prasmes: išvestinė yra pokyčių santykio riba, o taip pat — liestinės lygties krypties koeficientas bei liestinės ir abscisių ašies sudaromo kampo tangentas.

Stokodami laiko daugelis mokytojų tikriausiai norėtų kuo greičiau išmokyti formalių išvestinių skaičiavimo taisyklių ir pereiti prie išvestinių skaičiavimo ir taikymo. Tačiau vis dėlto reiktų suskaičiuoti vieną kitą išvestinę pagal apibrėžimą, prisimenant, kad tai ne šiaip koks eilinis privalomas pratimas, bet funkcijos elgesio tyrimas... Galima netgi prieš pradedant skaičiuoti kiek paspėlioti, ką galėtume gauti, t. y. kokia ta funkcijos grafiko liestinė.

Suvokiame ir žinome:

liestinė yra ribinė kirstinių šeimos tiesė;

liestinės krypties koeficientas yra pokyčių santykio riba, t. y. išvestinė;

liestinės nurodytame grafiko taške gali ir nebūti.

Mokame:

apskaičiuoti paprastų funkcijų išvestines nurodytuose taškuose pagal apibrėžimą;

užrašyti liestinės lygtį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pirmieji trys (28–30) pratimai skirti intuityviam liestinės vaizdiniui sudaryti. Bent jau į pirmojo uždavinio klausimus visi turėtų mokėti teisingai atsakyti. Geometrinei išvestinės prasmei ir išvestinės apibrėžimo taikymui skirti 31–34 pratimai. Visų jų spręsti, žinoma, nebūtina, tačiau išnagrinėti bent vieną reikia.

28. a) $x=-2$, $y=0$ ir $x=2$, $y=0$; b) $x=\pi k, k\in \mathbf{Z}$, $y=0$; c) $x=1$, $y=0$.

29. Prieš braižant grafiką, perrašykime funkciją $f(x)$ taip:

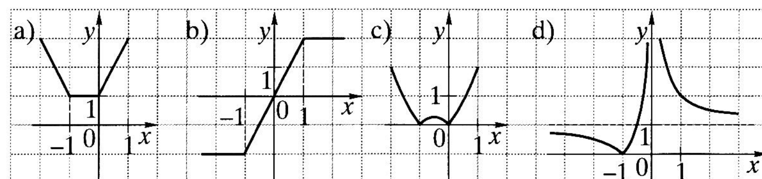
a) $f(x)=|x|+|x+1|=\begin{cases}-2x-1, & \text{kai } x\leqslant -1,\\ 1, & \text{kai } -1<x\leqslant 0,\\ 2x+1, & \text{kai } x>0;\end{cases}$

b) $f(x)=|x+1|-|x-1|=\begin{cases}-2, & \text{kai } x\leqslant -1,\\ 2x, & \text{kai } -1<x\leqslant 1,\\ 2, & \text{kai } x>1;\end{cases}$

c) $f(x)=|x(x+1)|=|x^2+x|$;

d) $f(x)=\left|\frac{x+1}{x}\right|=\left|1+\frac{1}{x}\right|$.

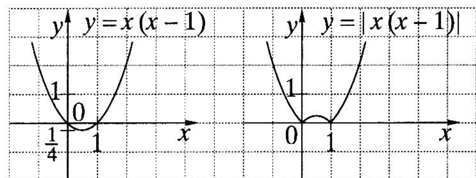
Nubraižykime funkcijos $f(x)$ grafiką:



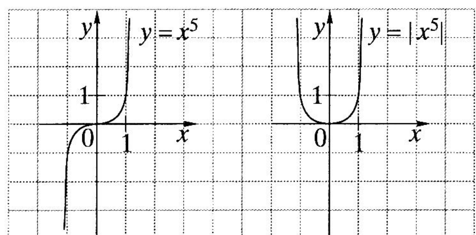
Funkcijos $f(x)$ grafikas neturi liestinės taškuose:

a) $(-1;\ 1),\ (0;\ 1)$; b) $(-1;\ -2),\ (1;\ 2)$; c) $(-1;\ 0),\ (0;\ 0)$; d) $(-1;\ 0),\ (0;\ 0)$.

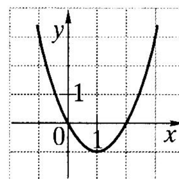
Pastaba. Pratimuose c) ir d) naudinga atkreipti dėmesį, kad grafikas neturi liestinės taškuose, kuriuose funkcijos grafikas pasiekia x ašį. Natūraliai kyla klausimai: kodėl taip įvyksta? ar visada? Prisiminkime, kaip braižomas funkcijos $y = |f(x)|$ grafikas. Funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką galima gauti iš funkcijos $f(x)$ grafiko, po Ox ašimi esančią dalį simetriškai perbraižant virš Ox ašies. Todėl dažnai susidaro grafiko „lūžiai", pvz.:



Šiuose „lūžiuose" liestinė neegzistuoja. Kai Ox kirtimo taške funkcijos grafikas liečia Ox ašį, „lūžis" nesusidaro, pvz.:



30. a) Funkcijos $f(x) = x(x-2)$ grafiko liestinė, nubrėžta taške $x = 1$, su Ox ašimi sudaro $180°$ kampą ir $\operatorname{tg} 180° = 0$. Šios funkcijos grafiko liestinė, nubrėžta taške $x = 2$, su Ox ašimi sudaro kampą $0° < \varphi < 90°$ ir $\operatorname{tg}\varphi > 0$. Kadangi funkcijos $f(x)$ išvestinės $f'(x)$ reikšmė taške x_0 lygi funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės, nubrėžtos šiame taške, ir Ox ašies sudaromo kampo tangentui ir $\operatorname{tg} 180° < \operatorname{tg}\varphi$ $(0° < \varphi < 90°)$, tai $f'(1) < f'(2)$. Taigi nelygybė yra teisinga.



Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:

b) nelygybė neteisinga; c) nelygybė teisinga; d) nelygybė teisinga.

31. a) $\operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1;\ \varphi_0 = 45°;$

b) $\operatorname{tg}\varphi_0 = f'(\sqrt{3}) = \sqrt{3};\ \varphi_0 = 60°.$

32. a) Liestinės lygtis yra tokia: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$.
Kadangi $x_0 = 1$, tai $f(x_0) = f(1) = (1+1)^2 = 4$.
Raskime liestinės krypties koeficientą, t. y. $f'(1)$.
Remdamiesi išvestinės apibrėžimu, gauname:

$f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x+1)^2 - 4}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{4\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}(4 + \Delta x)$. Kai $\Delta x \to 0$, tai $4 + \Delta x \to 4$. Taigi $f'(1) = 4$.
Funkcijos grafiko liestinės lygtis $y = 4(x-1) + 4$, $y = 4x$.

b) $x_0 = 1$, $f(1) = 0$,

$f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x-1)^2 - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0;$
funkcijos grafiko liestinės lygtis $y = 0$.

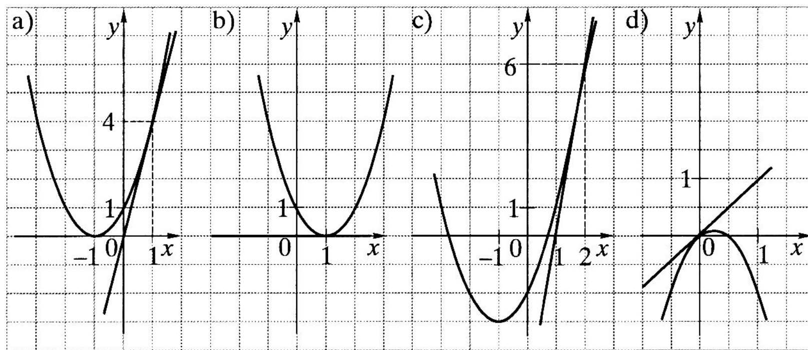
c) $x_0 = 2$, $f(2) = 6$, $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + 2(2+\Delta x) - 2 - 6}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(6 + \Delta x) = 6;$
funkcijos grafiko liestinės lygtis $y = 6x - 6$.

d) $x_0 = 0$, $f(0) = 0$,

$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(1 - 2\Delta x) = 1;$
funkcijos grafiko liestinės lygtis $y = x$.

Nubraižykime funkcijos grafiką ir liestinę:



33. a) Nustatykime, ar tiesė $y = x$ yra funkcijos $f(x) = 4x - x^2$ grafiko liestinė. Ieškome tiesės $y = x$ ir funkcijos $f(x) = x(4 - x)$ grafiko susikirtimo taškų: $x = x(4-x)$, $x = 0$ ir $x = 3$. Kadangi tiesė parabolę kerta dviejuose taškuose, tai ši tiesė nėra funkcijos $f(x)$ liestinė.

Panašiai sprendžiami ir kiti punktai:

b) ir d) — duotoji tiesė nėra funkcijos $f(x)$ grafiko liestinė;

c), e) ir f) — duotoji tiesė yra funkcijos $f(x)$ grafiko liestinė.

34. a) $x_0 = 0$, $f(0) = 1$,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta x+1}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\Delta x+1} = -1;$$

funkcijos grafiko liestinės lygtis $y = -x + 1$;

b) $x_0 = 2$, $f(2) = 4$,

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2(2+\Delta x)}{2+\Delta x-1}-4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{\Delta x+1} = -2;$$

funkcijos grafiko liestinės lygtis $y = -2x + 8$;

c) $x_0 = 2$, $f(2) = 3$,

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2+\Delta x+1}{2+\Delta x-1}-3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{\Delta x+1} = -2;$$

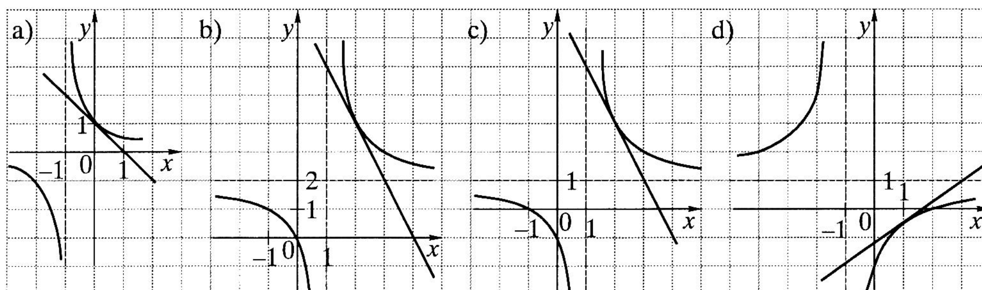
funkcijos grafiko liestinės lygtis $y = -2x + 7$;

d) $x_0 = 1$, $f(1) = -\frac{1}{2}$,

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1+\Delta x-2}{1+\Delta x+1}+\frac{1}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3}{2(\Delta x+2)} = \frac{3}{4};$$

funkcijos grafiko liestinės lygtis $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

Nubraižykime funkcijos $f(x)$ grafiką ir jo liestinę:



Nurodymas. Prieš braižant funkcijos $f(x)$ grafiką (b), c), d) punktai), užrašykite ją pavidalu $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$. Tada:

b) $f(x) = \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 2$;

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$;

d) $f(x) = \frac{x-2}{x+1} = -\frac{3}{x+1} + 1$.

Taip užrašius, aiškiau, koks tai bus grafikas.

35. a) Funkcijos $f(x) = \frac{1}{x}$ grafiko liestinės taške $x = -1$ krypties koeficientas yra $f'(-1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta x-1}+1}{\Delta x} = -1$, o liestinės taške $x = 1$ krypties koeficientas yra $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x} = -1$. Kadangi $f'(-1) = f'(1)$, tai šios dvi liestinės yra lygiagrečios.

b) Kadangi $f'(0) = -1$, $f'(1) = 1$, tai liestinės susikerta.

Kadangi $f'(0) \cdot f'(1) = -1 \cdot 1 = -1$, tai tos liestinės susikerta statmenai.

1.5. Išvestinių skaičiavimo pavyzdžiai

Šio skyrelio tikslas — perėjimas nuo išvestinės viename taške sąvokos prie išvestinės-funkcijos. Galima pradėti, pavyzdžiui, taip: įsivaizduokime, kad kiekvienai kintamojo x reikšmei apskaičiavome funkcijos $f(x)$ išvestinės reikšmę; priskyrus x reikšmei gautąją išvestinės reikšmę, gaunama nauja funkcija. Vadinsime ją funkcijos $f(x)$ išvestine ir žymėsime $f'(x)$. Funkcijos $f'(x)$ reikšmės — tai funkcijos $f(x)$ grafiko liestinių sudaromų kampų su Ox ašimis tangentai.

Galbūt verta, pavyzdžiui, suformuluoti ir išspręsti kad ir tokį uždavinį: apskaičiuokime funkcijos $f(x) = x^2$ išvestinės reikšmes $f'(1)$, $f'(2)$.

Skyrelyje pateikti trys funkcijos išvestinės radimo pavyzdžiai. Svarbiausias turbūt yra antrasis — jis nėra nei labai paprastas, kaip pirmas pavyzdys, nei reikalaujantis matematinės technikos kaip trečiasis. Pavyzdyje įrodoma, kad

$$(x^2)' = 2x.$$

Bent jį reiktų panagrinėti, juk svarbu nors kartą patirti, kaip iš ribų „išnyra“ nauja funkcija, savo „išvaizda“ neprimenanti savo atsiradimo aplinkybių. Matyt, pernelyg formalus ir pernelyg greitas perėjimas nuo funkcijų prie jų išvestinių ir yra tokios visiškai tikroviškos situacijos priežastis:

— Kas yra funkcijos x^2 išvestinė?

Moksleivis susimąsto, tačiau netrukus nudžiunga prisiminęs:

— Štai: $(x^2)'$!

Suvokiame ir žinome:

kas yra funkcijos išvestinė viename taške;

kas yra funkcijos išvestinė — nauja funkcija.

Mokame remdamiesi apibrėžimu rasti paprastų funkcijų išvestines.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pakaks, jeigu išnagrinėsime vieną kitą išvestinės skaičiavimo pagal apibrėžimą pavyzdį (36 ir 37 pratimai). Pratimus, kuriuos nagrinėsime, galime parinkti atsižvelgiant į moksleivių lygį. Svarbu ne pratimų įvairovė, bet prasmės suvokimas: kaip naudojantis išvestinės apibrėžimu viename taške gaunama nauja funkcija.

36. a) Suraskime funkcijos $f(x) = 2x - 1$ pokytį taške x:

$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = 2(x+\Delta x) - 1 - 2x + 1 = 2\Delta x.$

Todėl $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 2 = 2;$

b) $f(x) = 3x - 2x^2$,

$\Delta f(x) = 3(x+\Delta x) - 2(x+\Delta x)^2 - 3x + 2x^2 = \Delta x(3-4x) - 2\cdot(\Delta x)^2;$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(3-4x)-2\cdot(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3 - 4x - 2\cdot\Delta x) = 3 - 4x;$

c) $f(x) = 2x - 3x^2$, $\Delta f(x) = \Delta x(2-6x) - 3(\Delta x)^2$; $f'(x) = 2 - 6x$;

d) $f(x) = \sqrt{x+1}$,

$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1};$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1})} =$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}};$

e) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $\Delta f(x) = \sqrt{2x+2\Delta x+1} - \sqrt{2x+1};$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{2x+2\Delta x+1}-\sqrt{2x+1}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x+1}+\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}};$

f) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \boldsymbol{R}$,

$\Delta f(x) = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - ax^2 - bx - c =$

$\Delta x(2ax+b) + a(\Delta x)^2;$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2ax+b)+a(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2ax + b;$

g) $f(x) = \sqrt{ax+b}$, $a, b \in \boldsymbol{R}$,

$\Delta f(x) = \sqrt{a(x+\Delta x)+b} - \sqrt{ax+b} = \sqrt{ax+a\cdot\Delta x+b} - \sqrt{ax+b};$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{ax+a\cdot\Delta x+b}-\sqrt{ax+b}}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{ax+a\cdot\Delta x+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{ax+a\cdot\Delta x+b}+\sqrt{ax+b})}{\Delta x(\sqrt{ax+a\cdot\Delta x+b}+\sqrt{ax+b})} =$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{a}{\sqrt{ax+a\cdot\Delta x+b}+\sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}};$

h) $f(x) = \frac{a}{bx+c}$, $a, b, c \in \boldsymbol{R}$,

$\Delta f(x) = \frac{a}{b(x+\Delta x)+c} - \frac{a}{bx+c} = -\frac{ab\cdot\Delta x}{(bx+b\cdot\Delta x+c)(bx+c)};$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{-ab\cdot\Delta x}{\Delta x(bx+b\cdot\Delta x+c)(bx+c)} = -\frac{ab}{(bx+c)^2}.$

37. a) $f(x)=\frac{2}{x+2}$, $\Delta f(x)=\frac{2}{x+\Delta x+2}-\frac{2}{x+2}=-\frac{2\cdot\Delta x}{(x+\Delta x+2)(x+2)}$;
$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-2\cdot\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x+2)(x+2)}=-\frac{2}{(x+2)^2}$;
b) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$, $\Delta f(x)=\frac{-2\cdot\Delta x}{(2x+2\cdot\Delta x+1)(2x+1)}$; $f'(x)=-\frac{2}{(2x+1)^2}$;
c) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $\Delta f(x)=\frac{\Delta x}{(x+1)(x+\Delta x+1)}$; $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$;
d) $f(x)=\frac{2x}{x-1}$, $\Delta f(x)=\frac{-2\cdot\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$; $f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$.

38. $(f(x)+c)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+c-(f(x)+c)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$.

39. *Pastaba.* Uždavinio iliustracija yra nevykusi, nes taške $x=0$ turėtų būti $h(0)=0$.
a) $x_0=0$, $f(x_0)=f(0)=0$,
$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x)=\Delta x-\frac{(\Delta x)^2}{100}=\frac{100\cdot\Delta x-(\Delta x)^2}{100}$;
$\operatorname{tg}\varphi_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{100\cdot\Delta x-(\Delta x)^2}{100\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1-\frac{\Delta x}{100}\right)=1$, $\varphi_0=45°$.
b) Akivaizdu, kad akmuo skriejo paraboline trajektorija ir nukrito už 100 m: $h(100)=0$. Didžiausią aukštį akmuo pasiekė už 50 m, $h(x)=x-\frac{x^2}{100}=-\left(\frac{x}{10}-5\right)^2+25$, didžiausią reikšmę 25 m įgyja, kai $\frac{x}{10}-5=0$, t. y. $x=50$ (beje, kad $x=50$, aišku ir iš parabolės simetriškumo).
c) $x_0=100$, $f(x_0)=f(100)=0$, $\Delta f(100)=f(100+\Delta x)-f(100)=100+\Delta x-\frac{(100+\Delta x)^2}{100}=\frac{-100\cdot\Delta x-(\Delta x)^2}{100}$;
$\operatorname{tg}\varphi_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-100\cdot\Delta x-(\Delta x)^2}{100\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-1-\frac{\Delta x}{100}\right)=-1$, $\varphi_0=135°$;
(galima remtis ir parabolės simetriškumu: $180°-45°=135°$).

1.6. Funkcijos išvestinė ir judėjimo greitis

Matematinės funkcijos — tiesiog reikšmių priskyrimo taisyklės ir tiek. Tokioms „abstrakčioms" funkcijoms ir apibrėžėme išvestinės sąvoką. Tačiau matematikos taikymuose abstrakčios funkcijos tarsi „įgauna" kūną — kintamaisiais reiškiame tam tikrą fizinę prasmę turinčius dydžius. Taigi ir tokių „konkrečių" funkcijų išvestinė gali būti atitinkamai interpretuojama.

Šiame skyrelyje nagrinėjamos funkcijos, kurios reiškia nueitą kelią per nurodytą laikotarpį. Paprastai manoma, kad kūnui judant jo nueitas kelias didėja (arba bent nemažėja — jeigu kūnas yra ramybės būsenoje). Nueitas kelias didėja, netgi jei vis sugrįžtama į tą pačią vietą (kaip pasiklydus girioje). Taigi nueito kelio funkcija $s(t)$ yra nemažėjanti. Vidutinis kūno greitis nuo laiko momento $t = t_0$ iki t reiškiamas nueito kelio ir laiko pokyčių santykiu:

$$v_{\text{vid}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Galima vidutinio greičio sąvoką interpretuoti geometriškai. Įsivaizduokime, kad ant funkcijos $s(t)$, reiškiančios vieno kūno nueitą kelią, grafiko pažymėjome taškus $M_0(t_0; s_0)$, $M(t; s)$, $s_0 = s(t_0)$, $s = s(t)$. Jeigu sujungsime taškus M_0 ir M tiese, tai ši tiesė atitiks kito kūno judėjimo dėsnį. Abu kūnai laiko momentais t_0 ir t bus nuėję tą patį kelią; jei tarsime, kad jie juda ta pačia trajektorija ir pajudėjo iš to paties taško, tai laiko momentais t_0 ir t jie bus tose pačiose vietose. Tačiau antrojo kūno greitis pastovus — jo reikšmė lygi pirmojo kūno vidutinio greičio reikšmei nurodytame laiko intervale. Geometrinė vidutinio greičio prasmė — kirstinės krypties koeficientas. Taigi braižydami kelio funkcijos grafiko kirstines, einančias per tašką $M_0(t_0; s_0)$, mes geometriškai „atidedame" vidutinių greičių reikšmes. Kai taškas M vis labiau artėja prie taško M_0, šie vidutiniai greičiai atitinka vis trumpesnius laiktarpius ir artėja prie liestinės krypties koeficiento arba kitaip tariant — momentinio kūno greičio laiko momentu t_0. O dar kitaip tariant — prie funkcijos $s(t)$ išvestinės kai $t = t_0$.

Nueito kelio funkcija $s(t)$ nesiejama su kūno judėjimo trajektorija — ji gali būti bet kokia. Pavyzdžiui, kūnas gali judėti apskritimu, o gal — nuo vieno taško prie kito ir atgal. Kai rūpi ne tik nueitas kelias, bet ir kūno padėtis, ji nusakoma nurodant kūno koordinates laiko momentu t. Kai kūnas juda tiese, pakanka pasirinkti joje koordinačių pradžios tašką, kryptį ir nusakyti funkciją $x(t)$, nurodančią kūno padėtį laiko momentu t. Ši funkcija nebūtinai didėjanti. Kad geriau suvokti koordinačių funkcijos ir nueito kelio funkcijos ryšį ir skirtumus, galima aptarti, pavyzdžiui, vertikaliai aukštyn mesto kūno judesį. Išaiškinkime, kaip reikia interpretuoti koordinačių funkcijos išvestinę:

$$|x'(t)| = s'(t),$$

o $x'(t)$ ženklas parodo, ar kūnas judėdamas tolsta nuo koordinačių pradžios ar artėja.

Įsivaizduojame ir suvokiame:
kelio funkcijos ir koordinačių funkcijos prasmę;
momentinio greičio (pagreičio) sąvoką ir jos ryšį su funkcijos išvestinėmis.

Mokame nagrinėti paprastus judėjimo uždavinius remdamiesi kelio (koordinačių) funkcijų grafikais, išvestinėmis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Reikėtų išnagrinėti 40 pratimą, skirtą „grafinės" informacijos apie judėjimą skaitymui; taip pat bent vieną iš 43–44 pratimų, kuriais mokoma teisingai naudotis kūno koordinačių funkcijomis.

40. a) Kai $t = 0\,\text{s}$ ir $t = 20\,\text{s}$;
b) kai $t = 30\,\text{s}$;
c) $v_A(10) = 0\,\text{m/s}$, $v_B(10) = 1\,\text{m/s}$;
(*Pastaba.* Taško A greitis momentu $t = 10$ lygus 0, nors vidutinis jo greitis per 10 sekundžių lygus 3 m/s.)
d) $v_A(30) = 0\,\text{m/s}$;
e) pirmąsias 10 s abu taškai judėjo viena kryptimi (tolo nuo taško O), o vėliau judėjo priešingomis kryptimis.

41. $v(t) = 3t + 2t^2$, $t = 4$;
$v(4) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 = 44$.
Kūno pagreitis laiko momentu $t = 4$ yra
$a(4) = v'(4) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v(4+\Delta t) - v(4)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{3(4+\Delta t) + 2(4+\Delta t)^2 - 44}{\Delta t} =$
$\lim\limits_{\Delta t \to 0} (19 + 2\Delta t) = 19(\text{cm/s}^2)$.

42. a) $y(0) = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$,
$y(5) = 2 \cdot 5^2 + 1 = 51$;
b) $v_{\text{vid}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{y(5) - y(0)}{5 - 0} = \frac{51 - 1}{5} = 10$;

c) $v(0) = y'(0) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{y(0+\Delta t)-y(0)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{2(\Delta t)^2+1-1}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}(2\cdot\Delta t) = 0,$

$v(5) = y'(5) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{y(5+\Delta t)-y(5)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{2(5+\Delta t)^2+1-51}{\Delta t} =$
$\lim\limits_{\Delta t\to 0}(20+2\cdot\Delta t) = 20;$

d) $a(t) = v'(t)$, $v(t) = y'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{2(t+\Delta t)^2+1-2t^2-1}{\Delta t} =$
$\lim\limits_{\Delta t\to 0}(4t+2\Delta t) = 4t;$
$a(t) = v'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{4(t+\Delta t)-4t}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} 4 = 4.$

43. a) $h(0) = a\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ (m).

b) Kadangi funkcija $h(t)$ yra kvadratinė, o aukščiausiai akmuo bus pakilęs po 3 sekundžių, tai $h(0) = h(6)$. Todėl $\frac{3}{2} = a\cdot 6^2 + 3\cdot 6 + \frac{3}{2}$ ir $a = -\frac{1}{2}$.
Taigi akmens aukštį skriejimo metu nusako funkcija $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{3}{2}$.
(Arba: akmeniui esant aukščiausiame taške, jo greitis lygus 0.
Randame $v(t)$: $v(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{a(t+\Delta t)^2+3(t+\Delta t)+\frac{3}{2}-\left(at^2+3t+\frac{3}{2}\right)}{\Delta t} = 2at+3.$
Iš sąlygos, kad $v(3) = 0$, gauname $6a+3=0$, $a = -\frac{1}{2}$.)

c) Akmuo nukris, kai $h(t) = 0$. Todėl $-\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{3}{2} = 0$. Išsprendę šią lygtį, gauname: $t_1 = 3-2\sqrt{3}$ (netinka, nes $t > 0$) ir $t_2 = 3+2\sqrt{3}$. Taigi akmuo nukris maždaug po 6,5 s.

d) Randame, kokiame aukštyje bus akmuo po 3 sekundžių:
$h(3) = -\frac{1}{2}\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + \frac{3}{2} = 6$ (m), $h(0) = \frac{3}{2}$ m.
Todėl $v_{vid} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(3)-h(0)}{3} = \frac{6-\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2}$ (m/s).

e) $v_{vid} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(3)-0}{3+2\sqrt{3}-3} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ (m/s).

f) Remiantis b) punktu, $v(t) = 2at+3$, $a = -\frac{1}{2}$, $v(t) = -t+3$. Tada
$v(1) = -1+3 = 2$ (m/s), $v(2) = -2+3 = 1$ (m/s), $v(6) = -(-6+3) = 3$ (m/s).
Aišku, galima skaičiuoti ir nesinaudojant b) punktu:
$v(1) = h'(1) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t} =$
$\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+\Delta t)^2+3(1+\Delta t)+\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}+3+\frac{3}{2}\right)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}(2-\frac{1}{2}\Delta t) = 2$ (m/s),
$v(2) = h'(2) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t} =$
$\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(2+\Delta t)^2+3(2+\Delta t)+\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\cdot 4+6+\frac{3}{2}\right)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}(1-\frac{1}{2}\Delta t) = 1$ (m/s),
$v(6) = -h'(6) = -\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{h(6+\Delta t)-h(6)}{\Delta t} =$
$-\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(6+\Delta t)^2+3(6+\Delta t)+\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\cdot 36+3\cdot 6+\frac{3}{2}\right)}{\Delta t} = -\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-3-\frac{1}{2}\Delta t) = 3$ (m/s);

g) $a(t) = v'(t)$, $v(t) = h'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t} =$
$\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(t+\Delta t)^2+3(t+\Delta t)+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t^2-3t-\frac{3}{2}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}(3-t-\frac{1}{2}\cdot\Delta t) = 3-t;$
$a(t) = v'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{3-t-\Delta t-3+t}{\Delta t} = -\lim\limits_{\Delta t\to 0} 1 = -1$ (m/s^2).

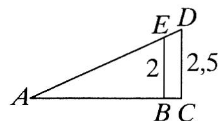
44. a) $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$.

b) Taškų padėtys sutaps, kai $x_1(t) = x_2(t)$. Todėl $t^2+10t = 2t^2+7t+2$, $t = 1$ ir $t = 2$.

c) $v_1(t) = x_1'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{(t+\Delta t)^2+10(t+\Delta t)-t^2-10t}{\Delta t} =$
$\lim\limits_{\Delta t\to 0}(10+2t+\Delta t) = 10+2t,$
$v_2(t) = x_2'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{2(t+\Delta t)^2+7(t+\Delta t)+2-2t^2-7t-2}{\Delta t} =$
$\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta t(7+4t)+2\cdot(\Delta t)^2}{\Delta t} = 7+4t;$
$v_1(t) = v_2(t)$, kai $10+2t = 7+4t$, $t = 1{,}5$.

d) $a_1(t) = v_1'(t) = 2$, $a_2(t) = v_2'(t) = 4$.

45. $BC = 5t$ (km); $\Delta ABE \backsim \Delta ACD$, todėl $\frac{AC-BC}{AC} = \frac{2}{2{,}5}$, $\frac{AC-5t}{AC} = \frac{4}{5}$,
$AC = 25t$. Pažymėkime $AC = 25t = s(t)$. Tada
$v(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{25(t+\Delta t)-25t}{\Delta t} = 25$ (km/h).
Taigi žmogaus galvos šešėlis juda 25 km/h greičiu.



1.7. Dvi išvestinių skaičiavimo taisyklės

Šis skyrelis — įvadas į formalų išvestinių skaičiavimą. Galima apsiriboti tik taisyklių formuluotėmis: konstantą galima iškelti iš po išvestinės ženklo; funkcijų sumos (skirtumo) išvestinė lygi funkcijų išvestinių sumai (skirtumui). Tačiau reikėtų pateikti bent jau pirmosios taisyklės įrodymą. Jis nesudėtingas, tačiau primena, kad matematinės taisyklės ir veiksmai taikomi ne todėl, kad kažkas leidžia taip daryti, bet todėl, kad jų teisingumas vieną kartą buvo įrodytas.

Mokame suformuluoti ir taikyti dvi funkcijų išvestinių skaičiavimo taisykles.

1.8. Daugianario išvestinė

Kad galėtume apskaičiuoti bet kokio daugianario išvestinę trūksta tik vienanario x^n išvestinės. Deja, apskaičiuoti ją nėra labai paprasta. Reikėtų remtis arba Niutono binomo formule, arba apibrėžimu bei matematine indukcija. Skyrelyje pasirinktas pastarasis „sušvelnintas" būdas: parodyta, kaip žinant žemesnio laipsnio vienanario išvestinę galima apskaičiuoti aukštesnio laipsnio vienanario išvestinę.

Galimas ir dar vienas būdas — remiantis matematine indukcija ir funkcijų sandaugos išvestinės skaičiavimo taisykle. Kai $n = 1$, jau įrodėme: $x' = 1 = x^0$.

Jei

$$(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2},$$

tai

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = x' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = \\ = x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = n \cdot x^{n-1}.$$

Tačiau funkcijų sandaugos išvestinės skaičiavimo ir kitas taisykles nuspręsta išdėstyti vėliau, kad formalios taisyklės neužgožtų sąvokos esmės.

Kaip elgtis su šio skyrelio medžiaga geriausiai nuspręs patys mokytojai: galima tik užrašyti formulę, galima parodyti, kaip skaičiuojama, pavyzdžiui, trečiojo laipsnio vienanario išvestinė, o vienam kitam mokiniui galbūt galima parodyti, kaip ši formulė išvedama „visu griežtumu".

Žinome vienanario išvestinės formulę.

Mokame:

skaičiuoti bet kokio daugianario išvestinę;

taikyti ją sprendžiant judėjimo uždavinius ir geometrinius uždavinius apie liestinę.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Reikėtų gerai mokėti spręsti 46–50 uždavinius. Tai paprasti pratimai mokytis išvestinių skaičiavimo technikos bei primenenantys geometrinę sąvokos prasmę.

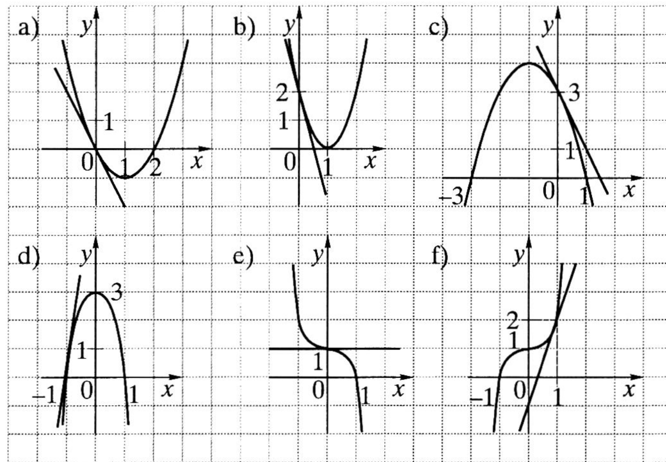
51 uždavinys suformuluotas kiek neįprastai — nepaaiškinus, ką reiškia grafikas „statesnis". Manyta, kad verta patiems moksleiviams palikti susivokti. To, ką patys suvokiame, vertė visada didesnė. Toks suvokimas būtų gera įžanga ir į funkcijų tyrimą. Jei lieka laiko, verta panagrinėti ir 53–54 uždavinius, kuriuose išvestinės pasirodo nevisai formaliame kontekste.

46. a) $f'(x) = 6x^2 - 6x + 6$; b) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 12x$;
c) $f'(x) = 8x + 6$; d) $f'(x) = 20x^3 + 4x + 5$;
e) $f'(x) = -3x^2 - 2x - 1$; f) $f'(x) = x^2 + \frac{4}{3}x + 1$.

47. a) $f'(x) = 6x - 5$, $f'(0) = -5$; b) $f'(x) = 9x^2 - 6$, $f'(2) = 30$;
c) $f'(x) = 8x^3 - 9x^2$, $f'(1) = -1$; d) $f'(x) = 12x^5$, $f'(-1) = -12$.

48. $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ — funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške $M_0(x_0; f(x_0))$ lygtis; $y_0 = f(x_0)$;
a) $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$; $f'(x) = 2x - 2$, $f'(x_0) = f'(0) = -2$;
funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygtis $y = -2x$;
b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = 2$;
$f'(x) = 4x - 4$, $f'(x_0) = f'(0) = -4$;
funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygtis $y = -4x + 2$;
c) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = 3$;
$f'(x) = -2x - 2$, $f'(x_0) = f'(0) = -2$;
funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygtis $y = -2x + 3$;
d) $f(x) = -3x^2 + 3$, $x_0 = -1$, $f(x_0) = 0$;
$f'(x) = -6x$, $f'(x_0) = f'(-1) = 6$;
funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygtis $y = 6x + 6$;
e) $f(x) = -x^3 + 1$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = 1$; $f'(x) = -3x^2$, $f'(x_0) = f'(0) = 0$;
funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygtis $y = 1$;
f) $f(x) = x^3 + 1$, $x_0 = 1$, $f(x_0) = 2$; $f'(x) = 3x^2$, $f'(x_0) = f'(1) = 3$;
funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygtis $y = 3x - 1$.

Nubraižykime funkcijos grafiką ir jo liestinę:



Pastaba. Funkcijos grafikas ir jo liestinė gali turėti keletą ir netgi be galo daug bendrų taškų, pavyzdžiui:



Be to, gali atsitikti taip, kad lietimosi taške kreivė pereina iš vienos liestinės pusės į kitą (žr. e) punktą). Taip pat funkcijos grafiko liestinė gali kirsti šį grafiką kitame taške (žr. f) punktą; tiesė $y = 3x - 1$ kirs funkcijos $f(x) = x^3 + 1$ grafiką taške $(-2; -7)$).

49. Abscisių ašis — tai tiesė $y = 0$. Šios tiesės krypties koeficientas lygus 0. Vadinasi, kad funkcijos $f(x)$ grafiko liestinė būtų lygiagreti abscisių ašiai, tai liestinės krypties koeficientas turi būti lygus 0. Taigi reikia rasti taškus, kuriuose funkcijos išvestinė lygi nuliui.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 3$; $3x^2 - 3 = 0$, $x = -1$ ir $x = 1$. Kai $x = -1$, tai $y = 3$; kai $x = 1$, tai $y = -1$. Taigi per taškus $(-1; 3)$ ir $(1; -1)$ nubrėžtos funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygiagrečios Ox ašiai.

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:

b) $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}; -1 + \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}; -1 - \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$;

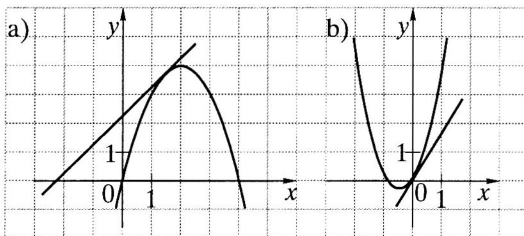
c) $(0; 0)$ ir $(-2; 12)$; d) $(-1; 4)$ ir $(1; -4)$.

Pastaba. Sąlyga aiškesnė, pakoregavus ją taip: *Raskite tašką, per kurį nubrėžta funkcijos grafiko liestinė lygiagreti abscisių ašiai.*

50. a) Reikia rasti tašką, kuriame $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi$.
Kadangi $\varphi = \frac{\pi}{4}$, tai $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Todėl liestinės krypties koeficientas $f'(x) = 1$. Funkcijos $f(x) = -x^2 + 4x$ išvestinė yra $f'(x) = -2x + 4$. Tada $-2x + 4 = 1$ ir $x = 1{,}5$; $f(1{,}5) = 3{,}75$. Taigi funkcijos $y = -x^2 + 4x$ grafiko liestinė, nubrėžta per tašką $(1{,}5; 3{,}75)$, su abscisių ašimi sudaro kampą $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

b) $(0; 0)$.

Nubraižykime funkcijos grafiką ir liestinę:



Pastaba. Galima pakoreguoti uždavinio sąlygą taip: *...tašką, per kurį nubrėžta grafiko liestinė...*

51. *Nurodymas.* „Statesnis“ grafikas bus tos funkcijos, kurios grafiko liestinės taške $x = 1$ krypties koeficientas bus didesnis.

a) $f(x) = x^3 + 10$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) = 3$;
$g(x) = 2x^2 - 10$, $g'(x) = 4x$, $g'(1) = 4$.

Kadangi $g'(1) > f'(1)$, tai taške $x = 1$ „statesnis“ yra funkcijos $g(x)$ grafikas.

b) $f'(1) = 11$, $g'(1) = -90$. Pereidamas tašką $x = 1$ funkcijos $f(x)$ grafikas kyla, o funkcijos $g(x)$ — leidžiasi žemyn ir leidžiasi daug „stačiau“ negu funkcijos $f(x)$ grafikas kyla.

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:

c) abu vienodai statūs, t. y. abiejų funkcijų grafikų liestinės taške $x = 1$ yra lygiagrečios;

d) $f(x)$; e) $f(x)$; f) $g(x)$.

52. a) Randame funkcijų $f(x) = 3x^2 + 4x$ ir $g(x) = -\frac{1}{4}x$ grafikų susikirtimo taškus: $3x^2 + 4x = -\frac{1}{4}x$, $x = 0$ ir $x = -\frac{17}{12}$.
Randame funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ išvestinių reikšmes grafikų susikirtimo taškuose (grafikų liestinių krypčių koeficientus): $f'(x) = 6x + 4$, $f'(0) = 4$, $f'\left(-\frac{17}{12}\right) = -\frac{9}{2}$; $g'(x) = -\frac{1}{4}$, $g'(0) = g'\left(-\frac{17}{12}\right) = -\frac{1}{4}$.
Kadangi liestinių taške $x = 0$ krypčių koeficientų sandauga lygi -1, t. y. $f'(0) \cdot g'(0) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$, tai per tašką $x = 0$ nubrėžtos liestinės yra statmenos ir funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai kertasi stačiu kampu. Kadangi $f'\left(-\frac{17}{12}\right) \cdot g'\left(-\frac{17}{12}\right) \neq -1$, tai taške $x = -\frac{17}{12}$ grafikai stačiu kampu nesikerta.
Analogiškai įrodomi ir b), c) punktai. Punkte b) grafikai kertasi stačiu kampu taške $x = \frac{1}{2}$, punkte c) — taškuose $x = -1$ ir $x = 1$.

53. Smagračio kampinis greitis bus $\varphi'(t) = b - 2ct$ (rad./s). Smagratis sustos, kai $b - 2ct = 0$, t. y. $t = \frac{b}{2c}$ (s).

54. Tiesės AC krypties koeficientas $k = 3$. Kai trikampis ABC sustos, tai tiesė AC bus funkcijos $y = (x - 1)^3$ grafiko liestinė, kurios krypties koeficientas $y' = 3$ (liestinė bus lygiagreti pradinei tiesės AC padėčiai). Taigi reikia rasti grafiko tašką, kuriame $y'(x) = 3$. Raskime funkcijos $y = (x - 1)^3$ išvestinę: $y' = 3(x - 1)^2$. Tada $3(x - 1)^2 = 3$, $x = 0$ ir $x = 2$.
Trikampis atsirems į funkcijos grafiką vienintelį kartą, kai $x > 0$, netgi dar daugiau, kai $x > 1$. Todėl nagrinėkime tik sprendinį $x = 2$.
Užrašykime duotos funkcijos grafiko liestinės taške $x = 2$ lygtį:
$y = 3(x - 2) + 1$, $y = 3x - 5$.
Kadangi liestinė eina per tašką A, tai taško A koordinatės turi tenkinti liestinės lygtį. Kadangi taškas A yra x-ų ašyje, tai koordinatė $y = 0$. Todėl $3x - 5 = 0$, $x = 1\frac{2}{3}$. Taigi kai trikampis sustos, jo viršūnės A koordinatė bus $x = 1\frac{2}{3}$.
Pastaba. Tai sunkus uždavinys. Jį spręskite tik su stipriais moksleiviais.

55. a) 4; b) 5; c) 5; d)10.

2. IŠVESTINIŲ TAIKYMAS FUNKCIJOMS TIRTI

Šiame skyriuje „išbandoma“ ankstesniame skyrelyje apibrėžta išvestinės sąvoka. Išbandoma nagrinėjant svarbias problemas — funkcijų tyrimo uždavinius. Tiesa, svarbios funkcijos jau ištirtos anksčiau — dar vienuoliktoje klasėje. Tačiau tada tyrėme tik „aiškią kilmę“ turinčias funkcijas: laipsnines, rodiklines, logaritmines, paprasčiausias trigonometrines. Tai tik maža dalis funkcijų pasaulio atstovų... Suvokti tai nesunku: sudėjus laipsninę ir trigonometrinę funkcijas, gaunama funkcija, kuri nebepriklauso nei vienai iš jų šeimų. Galima ne tik sudėti, bet ir atimti, dauginti, dalyti... Galų gale reikia prisiminti ir išbandyti sudėtinės funkcijos sudarymo procedūrą. Taigi gali būti lengviau šimtą funkcijų užrašyti, negu vieną jų ištyrinėti. Be universalaus įrankio čia neapsieisi. Išvestinės ir yra tas universalusis įrankis. Iš pradžių jis išbandomas tiriant daugiausia daugianarius, o kai įrankio nauda tampa tikrai akivaizdi — jis patobulinamas, kad būtų galima tirti ir kitas funkcijas.

2.1. Funkcijų reikšmių didėjimas, mažėjimas ir ekstremumai

Skyrelis skirtas priminti pagrindinėms sąvokoms, susijusioms su funkcijos didėjimo bei mažėjimo savybėmis. Visą jo esmę galima paaiškinti vien nagrinėjant brėžinius. Svarbu, kad moksleiviai turėtų funkcijos maksimumo, minimumo taško vaizdinius; suvoktų, kad maksimumo taške funkcija iš didėjimo „būsenos“ pereina į mažėjimo, minimumo taške — atvirkščiai; žinotų, kad funkcija gali neturėti nei maksimumo, nei minimumo taškų; gali turėti tokių taškų ir ne po vieną. Galima, užuot nagrinėjus vadovėlio brėžinius ar tekstą, tiesiog suformuluoti, pavyzdžiui, tokias užduotis: nubrėžkite funkcijos, didėjančios intervale $(-\infty; 1)$ ir mažėjančios intervale $(1; +\infty)$ grafiką; nubrėžkite funkcijos, įgyjančios minimumą taške $x = -1$ ir maksimumą taške $x = 2$, grafiką; ir t. t.

Jeigu neaiškumų nekyla, vadinasi, skyrelio sąvokos aiškios. Apibrėžimų mokytis, žinoma, nereikia. Tačiau, tiems moksleiviams, kurie ketina studijuoti tiksliuosius mokslus, reikia pasiūlyti žvilgtelti ir į aiškiai suvokiamų sąvokų apibrėžimus, užrašytus matematine kalba.

2.2. Lagranžo teorema

Mokytojų požiūris į šio skyrelio tekstą gali būti įvairus. Jeigu teiginį „jei funkcijos išvestinė intervale yra teigiama (neigiama), tai funkcija yra šiame intervale didėjanti (mažėjanti)“ ketinama paaiškinti tik brėžiniais, tai šį skyrelį galima tiesiog praleisti. Tačiau jeigu norima ne tik „parodyti“ bet ir „įrodyti“, tai be Lagranžo teoremos neapsieisime. Tačiau šios teoremos įrodymo skyrelyje nėra; tėra tik teiginio iliustracija brėžiniu. Ir to pakanka. Teiginio esmė labai paprasta: jeigu gera funkcija (t. y. visuose taškuose turinti išvestinę) nagrinėjama tik uždarame ir baigtiniame intervale, tai atsiras bent vienas grafiko taškas, kuriame nubrėžtos liestinės krypties koeficientas lygus „didžiųjų“ pokyčių santykiui.

Mokame parodyti Lagranžo teoremos esmę brėžiniu.

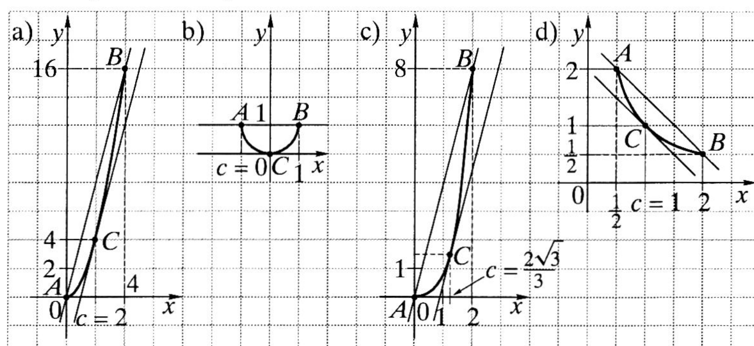
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pakaks, jei atliksime vieną kitą 56 užduoties dalį. Galbūt kam nors bus įdomu išspręsti vieną kitą 58 uždavinio variantą. Tačiau šis uždavinys labiau tinka savarankiškai spręsti namuose, nes skaičiavimams tenka sugaišti kiek daugiau laiko.

56. a) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$. Įstatę a, b ir c į Lagranžo formulę, gauname: $2c = \frac{4^2-0^2}{4-0}$, $c = 2$;

b) $c = 0$; c) $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; d) $c = 1$.

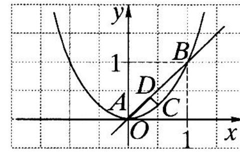
Nubraižykime brėžinį:



57. a) $y(t) = 32t - t^2$, $v(t) = y'(t) = 32 - 2t$;
$y(10) = 32 \cdot 10 - 10^2 = 220$, $y(0) = 0$;
$v_{\text{vid}} = \frac{y(10)-y(0)}{10-0} = \frac{220}{10} = 22\,(\text{m/s})$. Sudarome lygtį:
$y'(t) = 22$, $32 - 2t = 22$, $t = 5\,\text{s}$. Taigi vidutinis taško greitis atkarpoje $[0; 10]$ yra $22\,\text{m/s}$. Laiko momentu $t = 5\,\text{s}$ momentinis greitis lygus vidutiniam greičiui.

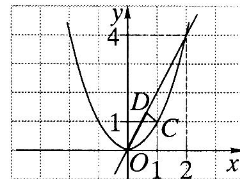
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $v_{\text{vid}} = -16\,\text{m/s}$, $t = 24\,\text{s}$; c) $v_{\text{vid}} = 0\,\text{m/s}$, $t = 16\,\text{s}$.

58. a) Kirstinės OB lygtis $y = x$. Remdamiesi Lagranžo teorema raskime parabolės tašką C, kuriame parabolės liestinė lygiagreti kirstinei OB: $y = x^2$, $y' = 2x$, $2c = \frac{1^2-0^2}{1-0}$, $c = \frac{1}{2}$. Taigi $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

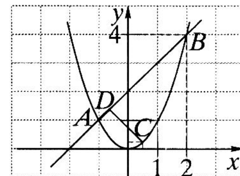


Parabolės liestinės, nubrėžtos per tašką C, lygtis yra $y = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$.
Tada tiesės CD ($CD \perp OB$) lygtis yra $y = -1\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$, $y = -x + \frac{3}{4}$.
Randame taško D koordinates: $x = -x + \frac{3}{4}$, $x = \frac{3}{8}$, $D\left(\frac{3}{8}; \frac{3}{8}\right)$.
Tada ieškomas atstumas $d = OD = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{3}{8}\sqrt{2}$.

b) Kirstinės lygtis $y = 2x$. Randame parabolės tašką C, kuriame parabolės liestinė lygiagreti kirstinei: $2c = \frac{2^2-0^2}{2-0}$, $c = 1$. Taigi $C(1; 1)$. Tiesės CD lygtis yra $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Tada $D\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$, ir $d = OD = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.



c) Per taškus $(0; 2)$ ir $(-1; 1)$ nubrėžtos kirstinės lygtis yra $y = x+2$. Randame parabolės tašką C, kuriame parabolės liestinė lygiagreti kirstinei:
$\frac{y(2)-y(-1)}{2+1} = 2c$, $\frac{4-1}{3} = 2c$, $c = \frac{1}{2}$. Taigi $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.
Per tašką C nubrėžtos kirstinės, statmenos duotajai, lygtis yra $y = -x + \frac{3}{4}$.
Randame šių kirstinių bendro taško D koordinates:
$x + 2 = -x + \frac{3}{4}$, $x = -\frac{5}{8}$, $D\left(-\frac{5}{8}; \frac{11}{8}\right)$.
Tada ieškomas atstumas $d = AD = \sqrt{\left(-\frac{5}{8} + 1\right)^2 + \left(\frac{11}{8} - 1\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.



2.3. Funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo požymiai

Šiame skyrelyje išvestinės pradedamos naudoti funkcijų tyrimui. Dvi skyrelio teoremos yra pagrindiniai mūsų įrankiai. Jeigu Lagranžo teoremos iš ankstesnio skyrelio nenagrinėjote, tada abi teoremas reikėtų aptarti bent remiantis grafikais. Nubrėžkime kokios nors diferencijuojamos (t. y. kiekviename taške turinčios išvestinę) funkcijos grafiką. Kaip atrodo funkcijos grafiko liestinės funkcijos didėjimo intervalo taškuose? Kokį kampą jos sudaro su Ox ašimi, koks jų krypties koeficientas? Teigiamas. Vadinasi, ir išvestinės reikšmės turi būti teigiamos. Ar galėtume nubrėžti didėjančios funkcijos grafiką, kad didėjimo intervalo taškuose grafiko liestinės sudarytų buką kampą su Ox ašimi? Pabandę įsitikinsime, kad negalima. Įsitikinus teiginių teisingumu jau galima juos „pakylėti" į taisyklių, kuriomis nuolat naudosimės, rangą.

Suvokiame ir žinome:

funkcijos išvestinės ir funkcijos monotoniškumo ryšį;
funkcijos monotoniškumo intervalų ieškojimo taisykles.

Mokame:

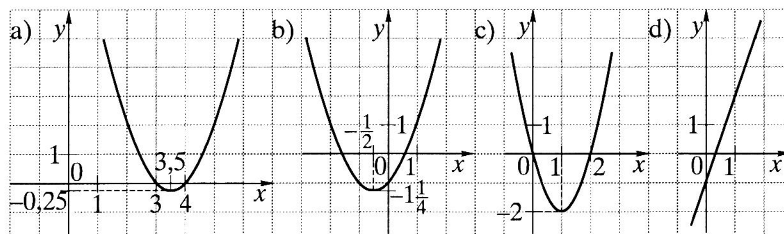
skaičiuoti daugianarių bei kvadratinės šaknies funkcijos išvestines;
remiantis šiomis išvestinėmis ieškoti didėjimo ir mažėjimo intervalų.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Svarbiausieji pratimai, skirti funkcijos monotoniškumo tyrimo įgūdžiams formuoti, yra 60 ir 61. Reikia, kad visi sugebėtų juos atlikti. Jei lieka laiko, verta atlikti ir vieną kitą 62-ojo pratimo dalį; šio pratimo funkcijos apibrėžtos ne viena, bet dviem formulėmis. 63-iajame uždavinyje funkcijos tyrimo uždavinys išnyra iš „geometrinio" konteksto.

59. a) Raskime funkcijos $f(x) = x^2 - 1$ išvestinę: $f'(x) = 2x$. Kadangi intervale $(0; +\infty)$ funkcijos $f(x)$ išvestinė yra teigiama ($f'(x) > 0$), tai šiame intervale funkcija $f(x)$ yra didėjanti.
b) Raskime funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ išvestinę: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Kadangi $f'(x) > 0$ intervale $(0; +\infty)$, tai šiame intervale funkcija $f(x)$ yra didėjanti.
c) Raskime funkcijos $g(x) = 2 - x^3$ išvestinę: $g'(x) = -3x^2$. Kadangi $g'(x) < 0$ intervale $(0; +\infty)$, tai šiame intervale funkcija $g(x)$ yra mažėjanti.
d) Raskime funkcijos $g(x) = \frac{3}{x}$ išvestinę: $g'(x) = -\frac{3}{x^2}$. Kadangi $g'(x) < 0$ intervale $(0; +\infty)$, tai šiame intervale funkcija $g(x)$ yra mažėjanti.

60. a) Raskime funkcijos $f(x) = x^2-7x+12$ išvestinę: $f'(x) = 2x-7$. Išsprendę nelygybę $2x - 7 > 0$ rasime funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo intervalus. Šios nelygybės sprendiniai — intervalas $(3,5; +\infty)$. Šiame intervale funkcija $f(x)$ yra didėjanti. Funkcijos reikšmių mažėjimo intervalus rasime išsprendę nelygybę $2x - 7 < 0$, $x < 3,5$. Taigi intervale $(-\infty; 3,5)$ funkcija $f(x)$ yra mažėjanti.
Analogiškai sprendžiami ir likę punktai:
b) intervale $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ funkcija $f(x) = x^2 + x - 1$ yra didėjanti, o intervale $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ — mažėjanti;
c) intervale $(1; +\infty)$ funkcija $f(x) = 2x^2 - 4x$ yra didėjanti, o intervale $(-\infty; 1)$ — mažėjanti;
d) funkcija $f(x) = 3x - 1$ visoje realiųjų skaičių aibėje yra didėjanti.
Nubraižykime funkcijos $f(x)$ grafiką:



61. a) Kadangi $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$, tai funkcija $f(x) = x^3 + 4x$ visoje realiųjų skaičių aibėje yra didėjanti;
b) intervaluose $(-\infty; -\sqrt{2})$ ir $(\sqrt{2}; +\infty)$ funkcija $f(x) = x^3 - 6x$ yra didėjanti, o intervale $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ — mažėjanti;
c) intervale $(0; +\infty)$ funkcija $f(x) = 4x^4 - 10$ yra didėjanti, o intervale $(-\infty; 0)$ — mažėjanti;
d) intervale $(0; +\infty)$ funkcija $f(x) = x^4 + 4x^2$ yra didėjanti, o intervale $(-\infty; 0)$ — mažėjanti;

e) intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; +\infty)$ funkcija $f(x) = x^2(x-3)$ yra didėjanti, o intervale $(0; 2)$ — mažėjanti;

f) intervaluose $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ ir $(1; +\infty)$ funkcija $f(x) = x(x-1)^2$ yra didėjanti, o intervale $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ — mažėjanti.

62. a) Randame funkcijos $f(x)$ išvestinę: $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kai } x < 0, \\ 0, & \text{kai } x = 0, \\ -2x, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$

Funkcijos $f(x)$ reikšmės mažėja intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(0; +\infty)$, o pati funkcija yra tolydi. Todėl visoje realiųjų skaičių aibėje funkcija yra mažėjanti.

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kai } x < 1, \\ -2x, & \text{kai } x > 1. \end{cases}$

Taške $x = 1$ išvestinė neegzistuoja. Taigi intervale $(0; 1)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(1; +\infty)$ — mažėjanti.

c) $f'(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{kai } x < 2, \\ 2x-5, & \text{kai } x > 2; \end{cases}$

$2x - 3 > 0$, kai $1{,}5 < x < 2$; $2x - 3 < 0$, kai $x < 1{,}5$;

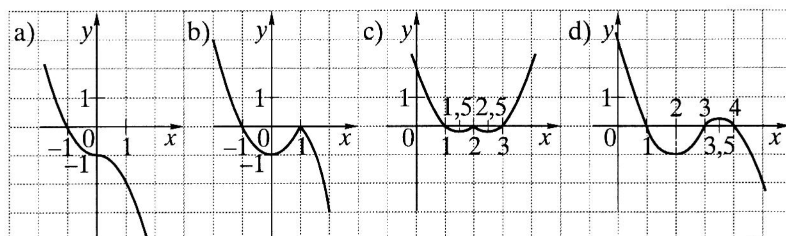
$2x - 5 > 0$, kai $x > 2{,}5$; $2x - 5 < 0$, kai $2 < x < 2{,}5$.

Todėl intervaluose $(1{,}5; 2)$ ir $(2{,}5; +\infty)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervaluose $(-\infty; 1{,}5)$ ir $(2; 2{,}5)$ — mažėjanti.

d) $f'(x) = \begin{cases} 2x-4, & \text{kai } x < 3, \\ -2x+7, & \text{kai } x > 3; \end{cases}$

intervaluose $(2; 3)$ ir $(3; 3{,}5)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti. Taške $x = 3$ funkcijos išvestinė neegzistuoja. Funkcija yra tolydi, todėl abu didėjimo intervalus galima sujungti į vieną. Taigi intervale $(2; 3{,}5)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervaluose $(-\infty; 2)$ ir $(3{,}5; +\infty)$ — mažėjanti.

Nubraižykime funkcijos $f(x)$ grafiką:



63. $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x + 1$, $d'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$. Tirdami $d'(x)$ ženklus, gauname, kad intervaluose $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ir $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ funkcija $d(x)$ yra didėjanti, o intervale $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — mažėjanti.

2.4. Funkcijos ekstremumai: kaip jų ieškoti?

Skyrelis tęsia ankstesnę — funkcijos didėjimo ir mažėjimo tyrimo temą, tačiau dabar didesnis dėmesys skiriamas ne monotoniškumo intervalams, bet ekstremumo taškams. Ekstremumo taškų paieškos metodo esmę galima nusakyti labai paprastai: randami „pretendentai" ir jie tiriami. Abiems tyrimo žingsniams naudojamas tas pats įrankis — išvestinė. Taškai, kuriuose išvestinė neegzistuoja arba lygi nuliui, ir yra „pretendentai" į ekstremumo taškus, t. y. kritiniai taškai; suradus juos tiriama jų „aplinka", t. y. nustatoma, kokie yra išvestinės ženklai į kairę ir į dešinę nuo tiriamojo taško. Žinoma, kad aiškinti geriausia pasitelkus brėžinius. Taigi visa skyrelio teorija „išdėstyta" šešiuose 60–61 puslapių brėžiniuose.

1 pavyzdyje parodyta, kaip funkcijos tyrimo rezultatus „apipavidalinti" lentele. Sudarius tokią lentelę, žinoma, galima pabraižyti ir funkcijos grafiko eskizą.

Suvokiame ir žinome:

kas yra kritiniai taškai;
kas yra ekstremumo taškai;
kaip ieškoti kritinių ir ekstremumo taškų ir kaip juos tirti.

Mokame:

surasti daugianarių kritinius taškus;
juos ištirti;
surašyti tyrimo rezultatus į lentelę.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Naująjį funkcijos ekstremumų ieškojimo ir tyrimo metodą išbandysime spręsdami 64–66 pratimus. Jie ir yra svarbiausi. 67–68 uždaviniai reikalauja kiek daugiau pastangų. Jie tiks stipresniems moksleiviams arba spręsti namuose.

64. a) Funkcija $f(x) = x^2 - 8x$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje ($D_f = \boldsymbol{R}$). Randame funkcijos $f(x)$ išvestinę: $f'(x) = 2x - 8$. Išvestinė egzistuoja visuose taškuose.
Randame, kuriuose taškuose $f'(x) = 0$: $2x - 8 = 0$, $x = 4$.
Taigi $x = 4$ — funkcijos kritinis taškas. Kadangi pereidamos šį tašką funkcijos išvestinės reikšmės keičia ženklą iš pliuso į minusą, tai taškas $x = 4$ yra minimumo taškas.

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:

b) Taškai $x = -1$ ir $x = 1$ yra funkcijos $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$ kritiniai taškai. Taškas $x = -1$ yra maksimumo taškas, o $x = 1$ — minimumo.

c) Taškai $x = 0$, $x = 1$ ir $x = -1$ yra funkcijos $f(x) = 2x^2 - x^4$ kritiniai taškai. Taškas $x = 0$ yra minimumo taškas, o $x = 1$ ir $x = -1$ — maksimumo.

d) Taškai $x = 0$ ir $x = \frac{1}{4}$ yra funkcijos $f(x) = 3x^4 - x^3$ kritiniai taškai. Kai x pereina kritinį tašką $x = 0$, funkcijos išvestinės reikšmės nekeičia ženklo, todėl šiame taške ekstremumo nėra. Taškas $x = \frac{1}{4}$ yra minimumo taškas.

65. Atsakymą patogu užrašyti lentele:

a)

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\searrow$	$f(1) = -2$, min	$\nearrow$

b)

x	$(-\infty; 1{,}5)$	$1{,}5$	$(1{,}5; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\searrow$	$f(1{,}5) = -1{,}25$, min	$\nearrow$

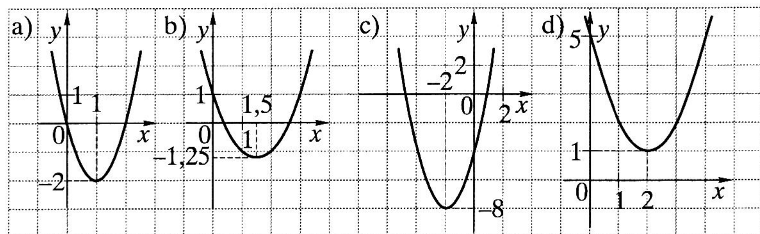
c)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-2) = -8$, min	$\nearrow$

d)

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\searrow$	$f(2) = 1$, min	$\nearrow$

Funkcijos $f(x)$ grafikas:



66. a)

x	$(-\infty; -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	↗	$f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$, max	↘	$f(0) = 0$, min	↗

b) Funkcija $f(x) = x^3 + 3x$ apibrėžta ir diferencijuojama visoje realiųjų skaičių aibėje; $f'(x) = 3x^2 + 3$. Matome, kad $f'(x) > 0$ su visais x. Taigi funkcija yra didėjanti ir ekstremumų neturi.

c)

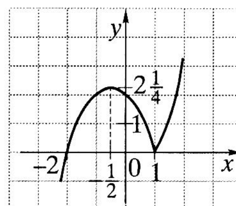
x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	↗	$f(-\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, max	↘	$f(\sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$, min	↗

d)

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	↗	$f(0) = 0$, max	↘	$f(4) = -32$, min	↗

67. a) $f(x) = |x-1|(x+2) = \begin{cases} -(x-1)(x+2), & \text{kai } x \leqslant 1 \\ (x-1)(x+2), & \text{kai } x > 1 \end{cases} =$

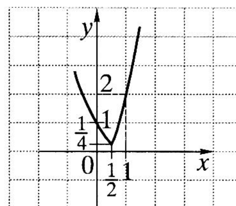
$\begin{cases} -x^2 - x + 2, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ x^2 + x - 2, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -2x - 1, & \text{kai } x < 1, \\ 2x + 1, & \text{kai } x > 1. \end{cases}$



Taške $x = 1$ funkcijos išvestinė neegzistuoja. Turime du kritinius taškus: $x = -\frac{1}{2}$ ir $x = 1$. Funkcijos reikšmės intervaluose $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ ir $(1; +\infty)$ didėja, o intervale $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ — mažėja. Todėl $f(1) = 0$ — minimumas, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4}$ — maksimumas.

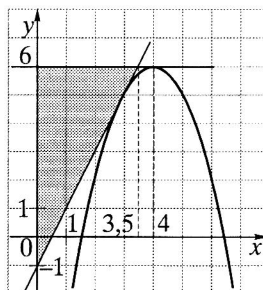
b) $f(x) = x^2 + |2x-1| = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{kai } x \leqslant \frac{1}{2}, \\ x^2 + 2x - 1, & \text{kai } x > \frac{1}{2}; \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{kai } x < \frac{1}{2}, \\ 2x + 2, & \text{kai } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$



Taške $x = \frac{1}{2}$ išvestinė neegzistuoja. Vienintelis kritinis taškas $x = \frac{1}{2}$. Intervale $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ funkcijos reikšmės mažėja, o intervale $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — didėja. Todėl $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ — minimumas.

68. Raskime funkcijos $f(x) = 8x - x^2 - 10$ maksimumą: $f'(x) = 8 - 2x$; $f'(x) = 0$, kai $x = 4$; $f(4) = 6$. Kai x pereina kritinį tašką $x = 4$, funkcijos išvestinės reikšmės keičia ženklą iš pliuso į minusą. Taigi taške $x = 4$ funkcija įgyja maksimumą $f(4) = 6$. (*Pastaba.* Galima samprotauti ir taip: kadangi funkcijos $f(x)$ grafikas yra parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, tai funkcijos maksimumas bus parabolės viršūnės taške. Randame viršūnės abscisę: $x_0 = -\frac{8}{2\cdot(-1)} = 4$. Tada viršūnės ordinatė $y_0 = f(x_0) = f(4) = 6$.)



Taške $x = 4$ nubrėžta funkcijos liestinė bus lygiagreti abscisių ašiai. Liestinės lygtis yra $y = 6$.

Užrašykime funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške $x_0 = 3$ lygtį. Kadangi $f'(3) = 2$ ir $f(3) = 5$, tai liestinės lygtis yra $y = 2(x-3) + 5$, $y = 2x - 1$.

Randame liestinių $y = 6$ ir $y = 2x - 1$ susikirtimo tašką: $6 = 2x - 1$, $x = 3{,}5$. Taigi liestinės kertasi taške, kurio koordinatės yra $(3{,}5; 6)$.

Randame tašką, kuriame liestinė $y = 2x - 1$ kerta Oy ašį: $x = 0$, $y = 2\cdot 0 - 1$, $y = -1$.

Nubraižome funkcijos $f(x)$ grafiką ir jo liestines (žr. paraštėje).

Randame plotą trikampio, kurį riboja šios liestinės ir ordinačių ašis (užtušuotas): $S = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot\frac{7}{2} = 12{,}25$ (ploto vienetų).

Atsakymas. 12,25 ploto vienetų.

3. FUNKCIJŲ IŠVESTINIŲ SKAIČIAVIMO TAISYKLĖS

Toliau gausinamas funkcijų tyrimo įrankių arsenalas. Suvokus išvestinių naudą labiau motyvuotas bus grynai „techninis“ išvestinių skaičiavimo uždavinys.

3.1. Funkcijų sandaugos ir dalmens išvestinės

Jau žinome, kad funkcijų sumos (skirtumo) išvestinė lygi išvestinių sumai (skirtumui). Šį teiginį paprasta interpretuoti geometriškai. Sudėjus dviejų tiesių lygčių

$$y = k_1x + m_1 \quad \text{ir} \quad y = k_2x + m_2$$

kairiąsias puses ir prilyginus y, gaunama trečios tiesės lygtis:

$$y = (k_1 + k_2)x + m_1 + m_2.$$

Pastarosios tiesės krypties koeficientas lygus pirmųjų tiesių krypties koeficientų sumai. Pasirinkus nepriklausomojo kintamojo $x = x_0$ reikšmę ir užrašius funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ liestinių su $x = x_0$ lygtis, sudėjus jų kairiąsias puses ir prilyginus y, gaunama funkcijos

$$f(x) + g(x)$$

grafiko liestinė, kai $x = x_0$.
Braižant funkcijos $f(x) + g(x)$ grafiką, tarsi „sudedami“ funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai; „sudėjus“ pastarųjų funkcijų liestines, gaunama funkcijų sumos liestinė.
Tačiau funkcijų sandaugos ar dalmens grafikas taip paprastai iš pradinių funkcijų negaunamas. Juk sudauginus dvi tiesines funkcijas gaunama jau nebe tiesinė, bet kvadratinė funkcija. Taigi „sudauginus“ dviejų tiesių grafikus gaunama parabolė! Štai kodėl funkcijų sandaugos ar dalmens išvestinės skaičiavimo taisyklė yra gerokai sudėtingesnė. Skyrelyje funkcijų sandaugos išvestinės taisyklė yra įrodyta. Įrodymas remiasi formaliais pertvarkiais ir ribų savybėmis. Jį aiškinti visiems moksleiviams tikriausiai nebūtina. Tačiau galima bent pabandyti paaiškinti, kodėl sąryšiai nebėra tokie paprasti, kaip sudėties ar skirtumo atvejais. Kitaip įprasime lengvabūdiškai pasikliauti analogijomis, manydami, kad išorinio panašumas jau yra ir pakankamas argumentas.
Šios dvi taisyklės gerokai praplečia mūsų galimybes skaičiuoti funkcijų išvestines. Galima konstatuoti, kad dabar jau galima apskaičiuoti bet kokios racionaliosios funkcijos išvestinę. Ir dar viena maloni naujiena: skyrelio pabaigoje nustatome, kad formulė

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

teisinga ne vien tik su natūraliosiomis, tačiau ir su bet kokiomis sveikosiomis n reikšmėmis.

Suvokiame ir žinome:
kas yra funkcijų sandauga;
kas yra funkcijų dalmuo;
kaip skaičiuojamos naujųjų funkcijų išvestinės.
Mokame taikyti naująsias išvestinių skaičiavimo taisykles.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pagrindinė šio skyrelio pratimų paskirtis — pripratinti remtis naujomis išvestinių skaičiavimo taisyklėmis. Tam skirti 69, 71–73 uždaviniai. Nebūtina visus juos išspręsti, tačiau reikia išspręsti tiek, kad taiskyklių naudojimas taptų tvirtu įgūdžiu. Jei yra laiko, vertėtų jo skirti 70 užduoties pratimams. Jie dar pagausina funkcijų, kurių išvestines mokame skaičiuoti, šeimą.

69. a) 1) $f(x) = (x^3 + 2x)(x^2 + 3x + 1) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 2x$;
$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 9x^2 + 12x + 2$;
2) $f'(x) = (x^3 + 2x)'(x^2 + 3x + 1) + (x^3 + 2x)(x^2 + 3x + 1)' =$
$(3x^2 + 2)(x^2 + 3x + 1) + (x^3 + 2x)(2x + 3)$.
Atskliaudę ir sutraukę panašiuosius narius gauname, kad
$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 9x^2 + 12x + 2$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $7x^6 + 12x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2$; c) $6x^5$; d) $4x^3$.

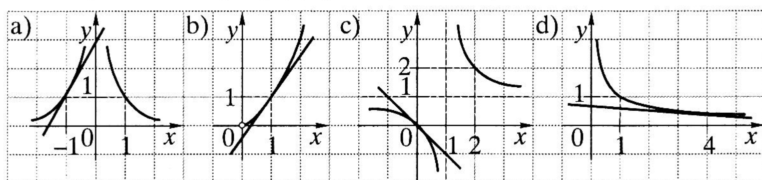
70. a) $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = (x \cdot \sqrt{x})' = x' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} =$
$\frac{3}{2}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$;
b) $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cdot x - \sqrt{x} \cdot (x)'}{x^2} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;
c) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = (x^2 \cdot \sqrt{x})' = (x^2)' \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot (\sqrt{x})' = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}$;
d) $\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cdot x^2 - \sqrt{x} \cdot (x^2)'}{x^4} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$.

71. a) $\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + 5x^{\frac{3}{2}}$; b) $7x^{\frac{5}{2}} - 16x^3 + 5x^4 - 11x^{\frac{9}{2}}$.
Nurodymas. Remkitės 70 uždavinyje išvestomis išvestinių skaičiavimo formulėmis.

72. a) $g'(x) = \frac{(x\sqrt{x})'(x+1)-x\sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x+1)-x\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}(x+3)}{(x+1)^2} = \frac{\sqrt{x}(x+3)}{2(x+1)^2}$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$; c) $-\frac{2}{(x-1)^2}$; d) $\frac{\sqrt{x}(x-3)}{2(x-1)^2}$; e) $\frac{2x^2-\frac{5}{4}x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2}$; f) $-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$.

73. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) taške $x = 0$ išvestinė neapibrėžta.

74. $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ — liestinės lygtis.
a) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = -1$. Randame funkcijos $f(x)$ išvestinę: $f'(x) = -2x^{-3}$.
Randame funkcijos išvestinės reikšmę taške x_0:
$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1)^{-3} = 2$.
Randame funkcijos reikšmę taške x_0: $f(x_0) = f(-1) = (-1)^{-2} = 1$.
Funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygtis $y = 2(x+1)+1$, $y = 2x+3$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$; c) $y = -x$; d) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$.
Nubraižykime funkcijos $f(x)$ grafiką ir liestinę:



75. Remiamės funkcijų sandaugos išvestinės formule:
$\big(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)\big)' = \big((f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)\big)' =$
$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' \cdot h(x) + \big(f(x) \cdot g(x)\big) \cdot h'(x) =$
$\big(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\big) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) =$
$f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$.
Randame funkcijos $f(x)$ išvestinę:
a) $3x^2 - 12x + 11$; b) $72x^2 + 92x + 29$;
c) $4x^3$; (*Pastaba.* Paprasčiausia rasti išvestinę pastebėjus, kad $f(x) = x^4 - 1$.)
d) $f'(x) = 2x(x^2+x)(x^3+x^2)+x^2(2x+1)(x^3+x^2)+x^2(x^2+x)(3x^2+2x) = x^4(x+1)(7x+5)$. (*Pastaba.* Patogiau išvestinę rasti funkciją $f(x)$ pertvarkius: $f(x) = x^5(x+1)^2 = x^5(x^2+2x+1) = x^7 + 2x^6 + x^5$.)
Pastaba. Apskritai, mokiniams įsisavinus diferencijavimą, reikėtų pratinti reiškinius pertvarkyti į patogius diferencijuoti.

3.2. Sudėtinės funkcijos išvestinė

Išmokti taikyti sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisyklę nelengva. Pirmiausia vertėtų gerai išsiaiškinti pačios sudėtinės funkcijos sąvoką. „Sudėti“ funkciją iš kelių kitų funkcijų nesunku: jei $y = f(t)$, $t = g(x)$, tai „įdėjus“ antrąją funkciją į pirmąją, gaunama sudėtinė funkcija $y = f(g(x))$. Jei savo ruožtu x irgi yra funkcija, pavyzdžiui, $x = h(s)$, galima sudaryti funkciją $y = f(g(h(s)))$.

Svarbu įgusti „išlukštenti“ sudėtinę funkciją, tarsi kokį svogūną, išskiriant išorinės funkcijos lukštą bei vidines funkcijas. Galima pasiūlyti moksleiviams sudaryti sudėtines funkcijas, o po to apsikeisti jomis ir išskaidyti sudarytąsias funkcijas į sudėtines dalis.

Skyrelyje sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisyklė neįrodinėjama. Tiesa, išsamiai išnagrinėtas sudėtinės funkcijos $f(x) = \sqrt{2x+1}$ išvestinės skaičiavimo pavyzdys. Iš esmės jis parodo visus svarbiausius samprotavimus, reikalingus ir bendrajai taisyklei įrodyti.

Tikriausiai mokytojai turi savų receptų, padedančių išmokyti šios taisyklės taikymo. Skyrelio pavyzdyje parodyta, kaip ją taikyti įvedant pagalbinį žymenį „vidinei“ funkcijai. Toks būdas turėtų padėti geriau suvokti sudėtinės funkcijos sandarą; įgudus, jo, žinoma, nebereiks.

Sudėtinės funkcijos struktūrą nustatyti gali padėti ir klausimas „kaip duotajai nepriklausomojo kintamojo reikšmei skaičiuotume funkcijos reikšmę?“ Bandydami į jį atsakyti nustatytume, ką apskaičiuotume iš pat pradžių (surastume „branduolio“ funkciją), ką vėliau...

Suvokiame ir žinome:

kas yra sudėtinė funkcija;
kaip skaičiuojama sudėtinės funkcijos išvestinė.

Mokame:

sudaryti sudėtinę funkciją iš duotųjų;
atpažinti sudėtinę funkciją, ją „išskaidyti“;
apskaičiuoti sudėtinės funkcijos išvestinę.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Svarbiausieji skyrelio pratimai (76–80) skirti sudėtinės funkcijos sąvokai įtvirtinti ir išvestinės skaičiavimo taisyklės taikymams. Sprendžiant 81–82 užduočių pratimus galima prisiminti bei pakartoti ir ankstesniojo skyrelio medžiagą — funkcijų sandaugos ir dalmens išvestinių skaičiavimo taisykles.

76. a) $f(g(x)) = g(x) + 1 = \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{1}{1-x}$,
$g(f(x)) = \frac{f(x)}{1-f(x)} = \frac{x+1}{1-(x+1)} = -\frac{x+1}{x}$;
b) $f(g(x)) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2}$,
$g(f(x)) = \frac{1}{1+f(x)} = \frac{1}{1+x^2}$;
c) $f(g(x)) = \sqrt{g(x)+1} = \sqrt{x^2+1}$,
$g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 = x + 1$;
d) $f(g(x)) = f(x+1) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$,
$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$.

77. $f(f(x)) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$.
Funkcija $f(x)$ neapibrėžta, kai $x = 1$.
Funkcija $f(f(x))$ neapibrėžta ir kai $x = 1$, ir kai $f(x) = 1$, t. y. $x = 0$.

78. a) $f(2x+1) = 3(2x+1) + 2 = 6x + 5$;
b) $f(2x+1) = 2(2x+1)^2 - 3(2x+1) + 1 = 8x^2 + 2x$;
c) $f(2x+1) = (2x+1)^3 - 2(2x+1)^2 = 8x^3 + 4x^2 - 2x - 1$;
d) $f(2x+1) = \sqrt{2(2x+1)-2} = 2\sqrt{x}$.

79. a) 1) $f(x) = (3x-2)^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$;
$f'(x) = (27x^3 - 54x^2 + 36x - 8)' = 81x^2 - 108x + 36$;
2) $f'(x) = ((3x-2)^3)' = 3(3x-2)^2 \cdot (3x-2)' =$
$9(9x^2 - 12x + 4) = 81x^2 - 108x + 36$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $f'(x) = 24x^2 - 24x + 6$;
c) $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 48x + 32$;
d) $f'(x) = 128x^7 + 192x^5 + 96x^3 + 16x$.

80. a) $f'(x) = 20(2x+3)^9$;
b) $f'(x) = 16(x^2 - 2x)^7(x - 1)$;
c) $f'(x) = 6\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^5(1 - x^2)$;
d) $f'(x) = 20x^3(x^4 - 1)^4$.

81. a) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$; b) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $f'(x) = -(2x-5)^{-\frac{3}{2}}$;
d) $f'(x) = -2x(2x^2+3)^{-\frac{3}{2}}$.
Nurodymas. Spręsdami c) ir d) punktus galite remtis 70b uždavinyje įrodyta formule: $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ arba dalmens išvestinės formule.

82. a) $f'(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $f'(x) = \frac{5x^2+2x}{\sqrt{2x+1}}$; c) $f'(x) = \frac{4-3x}{2x^2\sqrt{3x-2}}$;
d) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2-\sqrt{x}+\frac{3}{2}x\sqrt{x}}{(2x-x^2)^2}$.

83. a) $y'(x) = f'(x^3)\cdot(x^3)' = f'(x^3)\cdot 3x^2$;
b) $y'(x) = f'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})' = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$;
c) $y'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$;
d) $y'(x) = 3f^2(x)\cdot f'(x)$.

4. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS

Šiame skyrelyje „užkariaujama" dar viena teritorija — trigonometrinės funkcijos. Galima tai atlikti labai greitai — tiesiog užrašant paprasčiausių trigonometrinių funkcijų išvestinių formules ir pereinant prie jų taikymų. Jei mažai laiko, arba akivaizdu, kad teoriniai samprotavimai sunkiai pasiekia moksleivių protus, taip verta ir daryti, t. y. iškart pereiti prie 77 puslapio užduočių.

4.1. Riba $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}$

Jeigu nusprendėte, kad nepakanka vien užrašyti išvestinių formules, bet reikia ir patyrinėti, iš kur jos atsiranda, be šios svarbios ribos neišsiversite. Tiesa, ir tokiu atveju nebūtina nagrinėti skyrelio tekstą iki galo. Galbūt užteks paaiškinimo pasitelkus brėžinį ir nuojautą. Tokiu atveju galima sustoti 72 puslapio pradžioje prieš sakinį, kuris prasideda žodžiais „Jeigu norite..." Na, o jeigu iš tikrųjų norite, galite įsigilinti į nors ir nesudėtingų, tačiau gana subtilių samprotavimų grandinėlę. Matematinių olimpiadų, turnyrų dalyviai, o ir šiaip moksleiviai, mėgstantys pasiekti esmę „savo galva", turėtų norėti...

Suvokiame šios trigonometrinės ribos reikšmę.

Mokame šią trigonometrinę ribą geometriškai interpretuoti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šio skyrelio pratimai nėra svarbūs būsimoms temoms. Tad jeigu nebenorite grįžti prie ribų — tai ir negrįžkite.

84. *Nurodymas.* Pratimas skirtas pakartoti pagrindinėms funkcijų ribų savybėms. *Atsakymas.* a) -1; b) 0; c) 1; d) $-\frac{2}{3}$.

85. a) Pažymėję $3x = t$ ir pastebėję, kad $t\to 0$, kai $x\to 0$, skaičiuojame: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\cdot 1 = 1;$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\cos 2x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos 2x = 1;$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 2;$

e) pažymėję $x-2=t$ ir pastebėję, kad $t\to 0$, kai $x\to 2$, skaičiuojame: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+4)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t+4} = \frac{1}{4};$

f) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}.$

Pažymėję $\frac{x-a}{2} = t$, gauname $x-a = 2t$, $x = 2t+a$, $\frac{x+a}{2} = \frac{2t+2a}{2} = t+a$; $t\to 0$, kai $x\to a$. Todėl ieškoma riba lygi ribai: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t\cdot\cos(t+a)}{t} = 1\cdot\cos a = \cos a.$

Nurodymas. Pravartu pastebėti, kad su visais $a\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = 1.$

86. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 2x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}} = \frac{1}{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{1}{2};$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3\sin 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}} = \frac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5};$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x\cdot x\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x}\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x\cdot\cos 2x)} = 2\cdot 1 = 2;$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x\cdot x\cdot\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{x\cdot\cos^2 3x\cdot\frac{x\sin x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 3x\cdot\frac{\sin x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 3x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 3\cdot 3\cdot 1 = 9;$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\cdot\operatorname{ctg} 2x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos 2x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}}\cdot 1 = \frac{3}{2};$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\operatorname{ctg}^2 3x)x^2\right) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+x^2\operatorname{ctg}^2 3x) = \lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}(x^2\operatorname{ctg}^2 3x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 3x}{\sin^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{x\cdot x\cdot\cos^2 3x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 3x}} = \frac{1}{3\cdot 3\cdot 1} = \frac{1}{9}.$

Pastaba. Pravartu pastebėti, kad $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1.$

4.2. Sinuso, kosinuso, tangento ir kotangento funkcijų išvestinės

Ankstesniojo skyrelio riba — tarsi raktas nuo visos trigonometrinių funkcijų klasės išvestinių. Tai gerai iliustruoja dažnokai pasitaikančią matematikoje situaciją, kai vieno, rodos, gana specialaus uždavinio sprendimas atveria kelią daugybei naujų rezultatų. Pagal apibrėžimą apskaičiavus sinuso funkcijos išvestinę ir remiantis išvestinių skaičiavimo taisyklėmis nesunkiai gaunamos kitų paprasčiausių trigonometrinių funkcijų išvestinės. Tiesa, skyrelio 1 užduotyje siūloma kosinuso funkcijos išvestinę surasti pagal išnagrinėtą sinuso funkcijos pavyzdį. Kitaip kosinuso funkcijos išvestinę galima surasti remiantis sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisykle:

$(\cos x)' = \left(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$

Žinome paprasčiausių trigonometrinių funkcijų išvestinių formules.

Mokame jas taikyti kartu su kitomis funkcijų išvestinių skaičiavimo taisyklėmis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelio uždavinių yra gana daug. Jeigu sutaupėte laiko teorijos sąskaita, panaudokite jį pratimams. Jie skirti ne tik trigonometrinių funkcijų išvestinių formulių taikymui, tačiau ir funkcijų išvestinių skaičiavimo taisyklių pakartojimui bei geometrinės išvestinių prasmės priminimui.

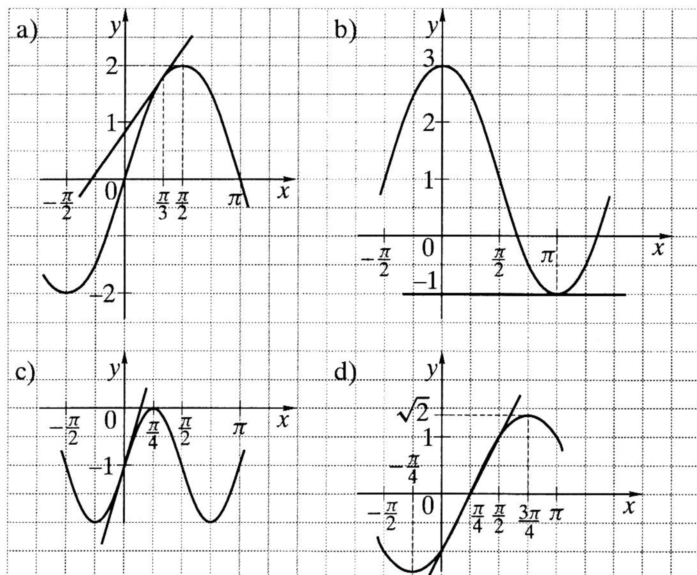
87. a) $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ — liestinės lygtis.
Randame funkcijos $f(x) = 2\sin x$ išvestinę: $f'(x) = 2\cos x$.
Randame funkcijos išvestinės reikšmę taške $x_0 = \frac{\pi}{3}$: $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$.
Randame funkcijos reikšmę taške x_0: $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.
Funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške x_0 lygtis $y = (x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}$.

b) $f(x) = 1 + 2\cos x$, $x_0 = \pi$; $f'(x) = -2\sin x$, $f'(\pi) = 0$, $f(\pi) = -1$.
Funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške x_0 lygtis $y = -1$.

c) $f(x) = \sin(2x) - 1$, $x_0 = 0$; $f'(x) = 2\cos(2x)$, $f'(0) = 2$, $f(0) = -1$.
Funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške x_0 lygtis $y = 2x - 1$.

d) $f(x) = \sin x - \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $f'(x) = \cos x + \sin x$, $f'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, $f(\frac{\pi}{4}) = 0$. Funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške x_0 lygtis $y = \sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4})$.
Grafikui braižyti, pertvarkykime funkcijos išraišką:
$\sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}\cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} =$
$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Funkcijos grafikas ir jo liestinė:



88. a) Funkcijos $g(x) = \operatorname{tg} x$ grafikas kerta Ox ašį taškuose $x = \pi k$, $k \in Z$. Kadangi funkcija $g(x) = \operatorname{tg} x$ yra periodinė, tai pakanka rasti didumą kampo, kuriuo grafikas kerta Ox ašį, pavyzdžiui, taške $x = 0$ (kai $k = 0$). Kadangi $g'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ir $g'(0) = 1$, tai $\operatorname{tg}\alpha = 1$ ir $\alpha = \frac{\pi}{4}$, t. y. 45°.

b) $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $x = \frac{\pi}{2}$; $g'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $g'(\frac{\pi}{2}) = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$ ir $\alpha = 135°$;

c) $g(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $x = 0$; $g'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $g'(0) = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$ ir $\alpha = 0°$;

d) $g(x) = \operatorname{ctg}^2 x$, $x = \frac{\pi}{2}$; $g'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$, $g'(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$ ir $\alpha = 0°$.

89. a) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}=2\sin x;\ f'(x)=2\cos x;$

b) $f(x)=\frac{1-\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x}=2\sin x;\ f'(x)=2\cos x;$

c) $f(x)=\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\cdot\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)\cdot\cos x}{1+\sin x}=\cos x;\ f'(x)=-\sin x;$

d) $f(x)=\frac{3\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\sin^2(\pi+x)}{\cos x}=\frac{3\operatorname{ctg}^2 x\cdot\sin^2 x}{\cos x}=3\cos x;\ f'(x)=-3\sin x.$

90. a) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\sin x}{1+\cos x}=\frac{\sin x(1+\cos x)}{\cos x(1+\cos x)}=\operatorname{tg}x;\ f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x};$

b) $f(x)=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x}=\frac{\operatorname{tg}x\left(\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x}=\operatorname{tg}x;\ f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x};$

c) $f(x)=\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\sin^2 2x-\cos^2 2x}{\sin 2x\cos 2x}=\frac{-(\cos^2 2x-\sin^2 2x)}{\sin 2x\cos 2x}=$ $-\frac{2\cos 4x}{\sin 4x}=-2\operatorname{ctg}4x;\ f'(x)=-2(\operatorname{ctg}4x)'=\frac{2}{\sin^2 4x}\cdot(4x)'=\frac{8}{\sin^2 4x};$

d) Kadangi $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\cos x}{\sin x}$, tai

$f(x)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2-4}=\frac{\sin 2x}{4\cos 2x}=\frac{1}{4}\operatorname{tg}2x;$

$f'(x)=\frac{1}{4}(\operatorname{tg}2x)'=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)'=\frac{1}{2\cos^2 2x}.$

91. *Nurodymas.* Jei funkcija $f(x)$ visoje apibrėžimo srityje turi išvestinę ir išvestinė yra teigiama, tai visoje apibrėžimo srityje funkcija yra didėjanti.

a) Funkcija $f(x)=2x+\sin x$ apibrėžta ir diferencijuojama visoje realiųjų skaičių aibėje.
Raskime funkcijos $f(x)$ išvestinę: $f'(x)=(2x)'+(\sin x)'=2+\cos x$. Kadangi $\cos x\geqslant -1$, tai $f'(x)\geqslant 1$. Todėl funkcijos $f(x)$ išvestinė visoje apibrėžimo srityje yra teigiama, vadinasi, funkcija $f(x)$ yra didėjanti.

b) $f'(x)=3+2\sin x>0;$

c) $f'(x)=5-\cos x-2\sin x>0;$

d) $f'(x)=1+\cos x\geqslant 0;\ f'(x)=0$, kai $x=\pi+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. Tačiau funkcija yra didėjanti visuose intervaluose $(-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k),\ k\in\boldsymbol{Z}$, o funkcija visoje $\boldsymbol{R}$ tolydi (tame tarpe ir taškuose $x=\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$). Taigi funkcija yra didėjanti visoje $\boldsymbol{R}$.

92. *Nurodymas.* Funkcijos apibrėžimo srities taškai, kuriuose funkcijos išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja, vadinami kritiniais taškais.

a) $f(x)=2\sin x+x,\ f'(x)=2\cos x+1$. Sprendžiame lygtį: $2\cos x+1=0$, $\cos x=-\frac{1}{2},\ x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. Taigi taškai $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$, yra funkcijos $f(x)$ kritiniai taškai;

b) $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x,\ f'(x)=-\sin x+\frac{1}{2};\ -\sin x+\frac{1}{2}=0,\ \sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$, — funkcijos $f(x)$ kritiniai taškai;

c) $f(x)=\operatorname{tg}x-2x,\ f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-2;\ \frac{1}{\cos^2 x}-2=0,\ 1-2\cos^2 x=0$, $-\cos 2x=0,\ \cos 2x=0,\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}$, — funkcijos $f(x)$ kritiniai taškai (taškuose $\cos x=0$ išvestinė neegzistuoja, bet jie nėra apibrėžimo srities taškai);

d) $f(x)=\operatorname{ctg}x+\frac{4}{3}x,\ f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{3};\ -\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{3}=0,\ -3+4\sin^2 x=0$, $\sin^2 x=\frac{3}{4},\ \frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{3}{4},\ \cos 2x=-\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$, — funkcijos $f(x)$ kritiniai taškai.

93. a) $g'(x)=(x^2\sin x)'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x;$

b) $g'(x)=(x^3\cos x)'=(x^3)'\cos x+x^3(\cos x)'=3x^2\cos x-x^3\sin x;$

c) $g'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot x-\sin x\cdot x'}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2};$

d) $g'(x)=\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)'=\frac{(\sin^2 x)'\cdot x-\sin^2 x\cdot x'}{x^2}=\frac{2\sin x\cdot(\sin x)'\cdot x-\sin^2 x}{x^2}=\frac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}.$

94. a) $h'(x)=\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'=2\sin\frac{1}{x}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}.$
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $h'(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(2\sqrt{x})$; d) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(2\sqrt{x})$.

95. a) $f'(x)=(\cos x-\frac{2}{\pi}x^2+\sin 3)'=(\cos x)'-\frac{2}{\pi}(x^2)'+(\sin 3)'=-\sin x-\frac{4x}{\pi};$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}-\frac{4\cdot\frac{\pi}{2}}{\pi}=-1-2=-3;$

b) $f'(x)=(4x-3)\cos x-(2x^2-3x+1)\sin x;\ f'(0)=-3;$

c) $f'(x)=4\cos 2x-3\sin x;\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$

d) $f'(x)=12x^3-\frac{1}{\cos^2 x};\ f'(0)=-1;$

e) $f'(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$; $f'(\pi) = 1$;

f) $f'(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

96. *Nurodymas.* Dvi tiesės, kurių lygtys $y = k_1 x + b_1$ ir $y = k_2 x + b_2$, yra lygiagrečios, jei $k_1 = k_2$, o $b_1 \neq b_2$. Taigi reikia rasti taškus, kuriuose funkcijos $f(x)$ išvestinė lygi nurodytos tiesės krypties koeficientui.

a) Funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiko liestinės krypties koeficientas yra $f'(x)$. Raskime funkcijos $f(x)$ išvestinę: $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$. Tiesės $y = -x$ krypties koeficientas yra -1. Sprendžiame lygtį: $-\sin x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, — per šiuos taškus nubrėžtos funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygiagrečios tiesei $y = -x$.

Analogiškai sprendžiamas ir b) punktas:

b) taškuose $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$, funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygiagrečios tiesei $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Pastaba. Reikėtų pakoreguoti uždavinio sąlygą taip: *Per kuriuos taškus nubrėžtos funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiko liestinės lygiagrečios tiesei...*

97. *Nurodymas.* Dvi tiesės, kurių lygtys $y = k_1 x + b_1$ ir $y = k_2 x + b_2$, yra statmenos, kai $k_1 \cdot k_2 = -1$. Taigi reikia rasti taškus, kuriuose funkcijos $f(x)$ išvestinė lygi $-\frac{1}{k}$ (k — nurodytos tiesės krypties koeficientas).

a) Raskime funkcijos $f(x) = \sin x$ išvestinę — funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės krypties koeficientą: $f'(x) = \cos x$. Tiesės $y = x$ krypties koeficientas yra 1. Todėl liestinės krypties koeficientas lygus -1. Sprendžiame lygtį: $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$, — per šiuos taškus nubrėžtos funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės statmenos tiesei $y = x$.

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:

b) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$; c) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; d) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Pastaba. Uždavinio sąlygą galima pakoreguoti: *Raskite taškus, per kuriuos nubrėžtos funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiko liestinės yra statmenos tiesei...*

98. $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$. Tada $\cos^2 x + 2\sin x = -\sin x \cdot \sin x$, $-2\sin x = 1$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. Intervalui $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ priklauso tik reikšmė $x = \frac{7\pi}{6}$ (kai $k = 1$).

99. $f'(x) = \left(3 - 2\sin(2x - \frac{\pi}{8})\right)' = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \left(2x - \frac{\pi}{8}\right)' = -4\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$; $-4\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2}$, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $2x - \frac{\pi}{8} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{16} \pm \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in Z$.

100. $(\cos x)' = -\sin x$, $(-\sin x)' = -\cos x$, $(-\cos x)' = \sin x$, $(\sin x)' = \cos x$.

5. RODIKLINĖS, LOGARITMINĖS IR LAIPSNINĖS FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS

5.1. Skaičius e

Šiame skyrelyje nėra nei uždavinių, nei patarimų kaip juos spręsti. Jame pirmą kartą pasirodo skaičius e, be kurio neišsiversime tolimesniuose skyreliuose. Kaip ir skaičius π — tai vienas svarbiausių skaičių matematikoje. Tik jų „pasirodymo" aplinkybės skiriasi. Skaičius π išnyra iš geometrinio konteksto, kai imama tyrinėti paprasčiausias „kreivas" linijas, o skaičius e susijęs su tam tikrais kitimo (didėjimo ar mažėjimo) reiškiniais. Skyrelyje bandoma įteigti, kad šis skaičius tikrai svarbus — juk jis pasirodo įvairiausiomis aplinkybėmis. Svarbiausia šio skyrelio dalis — rodiklinių funkcijų grafikų elgesio arti taško $x = 0$ tyrinėjimas. Jei pasirinksime grafiko tašką ir tyrinėsime grafiką arti jo, grafikas mažai skirsis nuo tiesės. Taigi keliame klausimą: kokios rodiklinės funkcijos grafikas arti taško $x = 0$ beveik nesisikiria nuo tiesės $y = x + 1$, t. y. tiesės, kurios sudaromo su Ox ašimi kampo tangentas lygus 1? Kitaip tariant, kokiam pagrindui a su mažais x galima naudotis apytiksle lygybe $a^x \approx 1 + x$?
Atsakymas kiek netikėtas — tokia rodiklinė funkcija iš tikrųjų yra, tačiau jos pagrindas yra skaičius, su kuriuo dar nebuvome susidūrę. Taigi galima suteikti jam vardą ir tyrinėti jo savybes. O savybių jis turi tikrai daug.
Nagrinėjant šio skyrelio medžiagą su mokiniais galima praleisti skyrelio pradžią, kur nagrinėjamas sekos

$$\mathrm{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

augimas, tačiau verta panagrinėti 80 puslapio brėžinį, kuris pagrindžia svarbią ribą

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Suvokiame ir mokame paaiškinti, kas gi yra tas skaičius e.

5.2. Rodiklinės funkcijos išvestinė

Galima prisiminti, kaip visų trigonometrinių funkcijų išvestinių skaičiavimas išsirutuliojo iš vienintelės ribos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Padėtis su rodiklinėmis funkcijomis panaši. Tai jau nebe pirmas, nors ir netiesoginis „slaptos" trigonometrinių ir rodiklinių funkcijų giminystės požymis. Tad sugaiškime kelias minutes ir paaiškinkime, kaip gaunama įžymioji formulė

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.$$

Išmokus diferencijuoti funkciją $f(x) = \mathrm{e}^x$, kitos rodiklinės funkcijos „užkariaujamos" beveik be vargo.

Suvokiame ir žinome:
kaip gaunama rodiklinės funkcijos e^x išvestinė;
kaip surandamos kitų rodiklinių funkcijų išvestinės.

Mokame skaičiuoti funkcijų, užrašomų formulėmis, į kurias įeina rodiklinės funkcijos, išvestines.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pirmieji uždaviniai (101–103) skirti „priprasti" prie rodiklinių funkcijų išvestinių formulių ir išmokti jomis naudotis paprasčiausiose situacijose. Kituose uždaviniuose rodiklinių funkcijų išvestinių skaičiavimas yra funkcijų tyrimo uždavinio dalis. Vertėtų išspręsti bent keletą 108 užduoties pratimų, o taip pat išnagrinėti ir 109 uždavinį, kuriame rodiklinė funkcija aprašo realų fizinį reiškinį.

101. a) $f'(x) = (\mathrm{e}^x + 3x)' = (\mathrm{e}^x)' + (3x)' = \mathrm{e}^x + 3$;
b) $f'(x) = (2\mathrm{e}^{-x} - 3)' = 2(\mathrm{e}^{-x})' - 3' = 2\mathrm{e}^{-x} \cdot (-x)' = -2\mathrm{e}^{-x}$;
c) $f'(x) = (\mathrm{e}^{2x} - \sin(2x))' = (\mathrm{e}^{2x})' - (\sin(2x))' = \mathrm{e}^{2x} \cdot (2x)' - \cos(2x) \cdot (2x)' = 2\mathrm{e}^{2x} - 2\cos(2x)$;
d) $f'(x) = (\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}^3)' = (\mathrm{e}^{-3x})' + (2\mathrm{e}^3)' = \mathrm{e}^{-3x} \cdot (-3x)' = -3\mathrm{e}^{-3x}$.

102. a) $f'(x) = (x^2 \cdot \mathrm{e}^x)' = (x^2)' \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot (\mathrm{e}^x)' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2x + x^2)$;
b) $f'(x) = (\sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x)' = (\sin(2x))' \cdot \mathrm{e}^x + \sin(2x) \cdot (\mathrm{e}^x)' = \cos(2x) \cdot (2x)' \cdot \mathrm{e}^x + \sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2\cos(2x) + \sin(2x))$;
c) $f'(x) = (\operatorname{tg} x \cdot \mathrm{e}^{3x})' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \mathrm{e}^{3x} + \operatorname{tg} x \cdot (\mathrm{e}^{3x})' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \mathrm{e}^{3x} + \operatorname{tg} x \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot (3x)' = \mathrm{e}^{3x}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 3\operatorname{tg} x\right)$;
d) $f'(x) = (\mathrm{e}^{2\sqrt{x}})' = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \cdot (2\sqrt{x})' = 2\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = 2\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$.

103. a) $g'(x) = (3^{3x})' = \ln 3 \cdot 3^{3x} \cdot (3x)' = 3 \ln 3 \cdot 3^{3x}$;
b) $g'(x) = (3^{x^2})' = \ln 3 \cdot 3^{x^2} \cdot (x^2)' = 2x \ln 3 \cdot 3^{x^2}$;

c) $g'(x) = (3^{x\sin x})' = \ln 3 \cdot 3^{x\sin x} \cdot (x\sin x)' =$
$\ln 3 \cdot 3^{x\sin x} \cdot (x'\sin x + x \cdot (\sin x)') = \ln 3 \cdot 3^{x\sin x}(\sin x + x\cos x)$;

d) $g'(x) = (3^{\cos^2 x})' = \ln 3 \cdot 3^{\cos^2 x} \cdot (\cos^2 x)' = \ln 3 \cdot 3^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x \cdot (\cos x)' =$
$-\sin(2x) \cdot \ln 3 \cdot 3^{\cos^2 x}$;

e) $g'(x) = (2^{\sin x^2})' = \ln 2 \cdot 2^{\sin x^2} \cdot (\sin x^2)' = \ln 2 \cdot 2^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot (x^2)' =$
$2x\cos x^2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{\sin x^2}$;

f) $g'(x) = (10^{\sqrt{x^2-1}})' = \ln 10 \cdot 10^{\sqrt{x^2-1}} \cdot (\sqrt{x^2-1})' =$
$\ln 10 \cdot 10^{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2-1)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln 10 \cdot 10^{\sqrt{x^2-1}}$.

104. $f'(x) = (x^3 + x - 1)' = 3x^2 + 1$, $f'(5) = 76$;
$g'(x) = \left(\frac{1}{\ln 4}(4^x - 10 \cdot 4^{\frac{x-1}{2}}) + 77x\right)' = \frac{1}{\ln 4}\left(4^x - 10 \cdot 4^{\frac{x-1}{2}}\right)' + (77x)' =$
$\frac{1}{\ln 4}\left((4^x)' - 10 \cdot (4^{\frac{x-1}{2}})'\right) + 77 = \frac{1}{\ln 4}\left(\ln 4 \cdot 4^x - 10 \cdot \ln 4 \cdot 4^{\frac{x-1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(x-1)'\right) + 77 =$
$4^x - 5 \cdot 4^{\frac{x-1}{2}} + 77 = 4^x - \frac{5}{2} \cdot 4^{\frac{x}{2}} + 77 = 2^{2x} - \frac{5}{2} \cdot 2^x + 77$.
$f'(5) = g'(x)$, kai $76 = 2^{2x} - \frac{5}{2} \cdot 2^x + 77$. Pažymėkime $2^x = t$.
Tada $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 2$.
Kai $t = \frac{1}{2}$, tai $2^x = \frac{1}{2}$ ir $x = -1$; kai $t = 2$, tai $2^x = 2$ ir $x = 1$.
Taigi $f'(5) = g'(x)$, kai $x = -1$ ir $x = 1$.

105. *Nurodymas.* Reikia rasti argumento x reikšmes, su kuriomis $y'(x) = 2$.
Raskime funkcijos $y(x) = \frac{4^x - 2^{x+1}}{\ln 4}$ išvestinę — funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės krypties koeficientą: $y'(x) = \frac{1}{\ln 4}(4^x - 2^{x+1})' = \frac{1}{\ln 4}((4^x)' - 2 \cdot (2^x)') =$
$\frac{1}{\ln 4}(\ln 4 \cdot 4^x - 2\ln 2 \cdot 2^x) = 4^x - 2^x = 2^{2x} - 2^x$. Sprendžiame lygtį:
$2^{2x} - 2^x = 2$. Iš čia $x = 1$. Taigi taške $x = 1$ funkcijos $y(x)$ grafiko liestinė yra lygiagreti tiesei $y = 2x + 5$.

106. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad visoje funkcijos $h(x)$ apibrėžimo srityje $h'(x) < 0$.
a) $h'(x) = -e^{-x} - 5 < 0$;
b) $h'(x) = e^{-2x}(-\sin 2x - 2\cos^2 x - 8) < 0$, nes $|\sin 2x| \leqslant 1$.

107. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad visoje funkcijos $h(x)$ apibrėžimo srityje $h'(x) > 0$.
a) $h'(x) = 3 + e^{-x} > 0$;
b) $h'(x) = e^{-3x}(\cos x - 3\sin x + 15) > 0$, nes $|\cos x| \leqslant 1$ ir $|\sin x| \leqslant 1$.

108. a) Funkcija $f(x) = 3 - x + e^{x+2}$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje.
Randame funkcijos $f(x)$ kritinius taškus:
$f'(x) = (3 - x + e^{x+2})' = 3' - x' + (e^{x+2})' = -1 + e^{x+2} \cdot (x+2)' =$
$e^{x+2} - 1$; $e^{x+2} - 1 = 0$, $e^{x+2} = e^0$, $x + 2 = 0$, $x = -2$.
Taigi taškas $x = -2$ yra funkcijos kritinis taškas.
Randame funkcijos reikšmę šiame taške: $f(-2) = 3 - (-2) + e^{-2+2} = 6$.
Randame funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo intervalus (sprendžiame nelygybę $f'(x) > 0$): $e^{x+2} - 1 > 0$, $x > -2$; mažėjimo intervalus ($f'(x) < 0$): $e^{x+2} - 1 < 0$, $x < -2$.
Patogu sudaryti lentelę:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	↘	$f(-2) = 6$, min	↗

Taigi funkcija $f(x)$ intervale $(-\infty; -2)$ yra mažėjanti, o intervale $(-2; +\infty)$ — didėjanti. Taške $x = -2$ funkcija įgyja minimumą $f(-2) = 6$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) Intervale $(-\infty; 3)$ funkcija $f(x)$ yra mažėjanti, o intervale $(3; +\infty)$ — didėjanti. Taške $x = 3$ funkcija įgyja minimumą $f(3) = 6$.
c) Intervale $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervale $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — mažėjanti. Taške $x = \frac{1}{2}$ funkcija įgyja maksimumą $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$.
d) Intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; +\infty)$ funkcija $f(x)$ yra mažėjanti, o intervale $(0; 2)$ — didėjanti. Taške $x = 0$ funkcija įgyja minimumą $f(0) = 0$, o taške $x = 2$ — maksimumą $f(2) = \frac{4}{e^2}$.
e) Intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$ funkcija $f(x)$ yra mažėjanti, o intervale $(-1; 1)$ — didėjanti. Taške $x = -1$ funkcija įgyja minimumą $f(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$, o taške $x = 1$ — maksimumą $f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
Nurodymas. Naudinga pastebėti, kad funkcija $f(x)$ yra nelyginė.

f) Intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(0; 1)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervaluose $(-1; 0)$ ir $(1; +\infty)$ — mažėjanti. Taškuose $x = -1$ ir $x = 1$ funkcija įgyja maksimumus $f(-1) = f(1) = \frac{1}{e}$, o taške $x = 0$ — minimumą $f(0) = 0$.
Nurodymas. Naudinga pastebėti, kad funkcija $f(x)$ yra lyginė.

109. a) $y(10) = 20 + 80 \cdot 2^{-1} = 60\,(^\circ\mathrm{C})$; b) $20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} = 40$, $t = 20\,(\mathrm{min})$;
c) $v = y'(t) = (20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}})' = 80 \cdot \ln 2 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} \cdot \left(-\frac{1}{10}t\right)' = -8 \ln 2 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$;
$y'(20) = -2 \ln 2 \approx -1{,}39$. Taigi arbata aušta maždaug $-1{,}39$ laipsnio per minutę greičiu.
d) $y'(40) = -\frac{1}{2} \ln 2$, $\frac{y'(20)}{y'(40)} = \frac{-2 \ln 2}{-\frac{1}{2} \ln 2} = 4$.
Taigi momentu $t = 40$ aušimo greitis keturgubai mažesnis, negu momentu $t = 20$.

5.3. Logaritminės funkcijos išvestinė

Logaritminės funkcijos išvestinės formulė gaunama labai greitai, tačiau ne tiesioginiu, bet „aplinkiniu“ keliu. Taigi — „tiesiau arčiau“ (aiškiau), tačiau „aplink greičiau“ (tačiau panašu į keistą fokusą). Nebus didelės žalos, jeigu logaritminės funkcijos išvestinės formulę užrašysime be jokio išvedimo. Tačiau matematines idėjas sugebantiems įvertinti moksleiviams vertėtų paaiškinti kelias matematinių samprotavimų eilutes. Jos gerai parodo, kaip gaunama daugelis matematinių rezultatų — išradingai pasinaudojant įprastomis taisyklėmis ar teiginiais. Galima atkreipti dėmesį, kad tą patį būdą, kuriuo buvo gauta logaritminės funkcijos išvestinės formulė, galima pritaikyti ir kitais atvejais: kai žinoma funkcijos išvestinė, o reikia surasti jai atvirkštinės funkcijos išvestinę.

Verta atkreipti dėmesį, kad sudėtingos (logaritminės) funkcijos išvestinė yra visai paprasta funkcija. Su tokiu atveju susidūrėme kone pirmą kartą. Iš tiesų: laipsninės funkcijos išvestinė — laipsninė funkcija, trigonometrinės — trigonometrinė ir t. t. O šičia — logaritminės funkcijos išvestinė yra žymiai „kuklesnės“ kilmės funkcija.

Žinome logaritminės funkcijos išvestinės formulę.

Mokame taikyti logaritminės funkcijos išvestinės formulę.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Kaip ir ankstesniame skyrelyje taip ir čia pirmieji uždaviniai (110–112) skirti logaritminės funkcijos išvestinės formulei įsiminti, kituose — išvestinės skaičiavimas yra dalis funkcijos tyrimo uždavinio.

110. *Nurodymas.* Ieškant duotų funkcijų išvestinių, patogu pirmiausia reiškinį pertvarkyti. Galima diferencijuoti ir kaip sudėtinę funkciją, o po to rezultatus palyginti.

a) $f(x)=\ln(2x)=\ln 2+\ln x,\ f'(x)=\frac{1}{x}$;
arba: $f'(x)=(\ln(2x))'=\frac{1}{2x}\cdot(2x)'=\frac{1}{x}$;

b) $f(x)=\ln(3x^2)=\ln 3+2\ln x,\ f'(x)=\frac{2}{x}$;
arba: $f'(x)=(\ln(3x^2))'=\frac{1}{3x^2}\cdot(3x^2)'=\frac{6x}{3x^2}=\frac{2}{x}$;

c) $f(x)=\ln(xe^x)=\ln x+x,\ f'(x)=\frac{1}{x}+1$;
arba: $f'(x)=(\ln(xe^x))'=\frac{1}{xe^x}\cdot(xe^x)'=\frac{1}{xe^x}(x'\cdot e^x+x\cdot(e^x)')=$
$\frac{1}{xe^x}(e^x+xe^x)=\frac{e^x(1+x)}{xe^x}=\frac{1+x}{x}=\frac{1}{x}+1$;

d) $f(x)=\ln(x^3e^{\cos x})=3\ln x+\cos x,\ f'(x)=\frac{3}{x}-\sin x$;
arba: $f'(x)=(\ln(x^3e^{\cos x}))'=\frac{1}{x^3e^{\cos x}}\cdot(x^3e^{\cos x})'=$
$\frac{1}{x^3e^{\cos x}}((x^3)'e^{\cos x}+x^3(e^{\cos x})')=\frac{1}{x^3e^{\cos x}}(3x^2e^{\cos x}+x^3e^{\cos x}\cdot(\cos x)')=$
$\frac{1}{x^3e^{\cos x}}(3x^2e^{\cos x}-x^3e^{\cos x}\cdot\sin x)=\frac{x^2e^{\cos x}(3-x\sin x)}{x^3e^{\cos x}}=\frac{3}{x}-\sin x$.

111. a) $f'(x)=(\ln(3x^2+2))'=\frac{1}{3x^2+2}\cdot(3x^2+2)'=\frac{6x}{3x^2+2}$;

b) $f'(x)=(x^2\ln x)'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$;

c) $f'(x)=(\ln^3 x)'=3\ln^2 x\cdot(\ln x)'=3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}=\frac{3\ln^2 x}{x}$;

d) $f'(x)=(\ln^3 x^3)'=3\ln^2 x^3\cdot(\ln x^3)'=3\ln^2 x^3\cdot\frac{1}{x^3}\cdot(x^3)'=$
$3\ln^2 x^3\cdot\frac{3x^2}{x^3}=\frac{9\ln^2 x^3}{x}$.

112. a) $g'(x)=\left(\frac{2\lg x}{\lg e}-\log_2 5\right)'=\frac{2}{\lg e}\cdot(\lg x)'=\frac{2}{\lg e}\cdot\frac{1}{x\ln 10}=\frac{2}{x\cdot\lg e\cdot\ln 10}=\frac{2}{x}$;

b) $g'(x)=\left(\frac{\log_2 x}{x}\right)'=\frac{(\log_2 x)'\cdot x-\log_2 x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x\ln 2}\cdot x-\log_2 x}{x^2}=\frac{\log_2 e-\log_2 x}{x^2}=$
$\frac{1}{x^2}\cdot\log_2\frac{e}{x}$;

c) $g'(x)=(e^x\cdot\log_2 x)'=(e^x)'\log_2 x+e^x(\log_2 x)'=e^x\log_2 x+e^x\cdot\frac{1}{x\ln 2}=$
$e^x\log_2 x+e^x\cdot\frac{\log_2 e}{x}=e^x\cdot\log_2(x\cdot e^{\frac{1}{x}})$;

d) $g'(x)=(\log_3 x\cdot\log_4 x)'=(\log_3 x)'\cdot\log_4 x+\log_3 x\cdot(\log_4 x)'=$
$\frac{\log_4 x}{x\ln 3}+\frac{\log_3 x}{x\ln 4}=\frac{1}{x}(\log_3 e\cdot\log_4 x+\log_3 x\cdot\log_4 e)$.

113. a) $h'(x)=(\ln(6x-x^2))'=\frac{1}{6x-x^2}\cdot(6x-x^2)'=\frac{6-2x}{6x-x^2}$;
$h'(x_0)=h'(1)=\frac{6-2\cdot 1}{6\cdot 1-1^2}=\frac{4}{5}$;

b) $h'(x)=(\log_3(6-4x+x^2))'=\frac{1}{(6-4x+x^2)\ln 3}\cdot(6-4x+x^2)'=\frac{2x-4}{(6-4x+x^2)\ln 3}$;
$h'(x_0)=h'(2)=0$.

114. a) $D_f = (0; +\infty)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.
Intervale (0; 1) funkcija $f(x)$ yra mažėjanti, o intervale $(1; +\infty)$ — didėjanti.
Taške $x = 1$ funkcija įgyja minimumą $f(1) = 1$.
b) $D_f = (2; +\infty)$, $f'(x) = 2x - 4 - \frac{2}{x-2}$.
Intervale (2; 3) funkcija $f(x)$ yra mažėjanti, o intervale $(3; +\infty)$ — didėjanti.
Taške $x = 3$ funkcija įgyja minimumą $f(3) = 4$.
c) $D_f = (0; 1) \cup (1; +\infty)$, $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.
Intervaluose (0; 1) ir (1; e) funkcija yra mažėjanti, o intervale $(e; +\infty)$ — didėjanti. Taške $x = e$ funkcija įgyja minimumą $f(e) = e$. Taške $x = 1$ funkcija ekstremumo neturi.
d) $D_f = (0; 1) \cup (1; +\infty)$, $f'(x) = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$.
Intervaluose (0; 1) ir $(1; \sqrt{e})$ funkcija yra mažėjanti, o intervale $(\sqrt{e}; +\infty)$ — didėjanti. Taške $x = \sqrt{e}$ funkcija įgyja minimumą $f(\sqrt{e}) = 2e$. Taške $x = 1$ funkcija ekstremumo neturi.

115. Raskime funkcijos $g(x) = a\ln(3x - 1)$ grafiko liestinės taške $x_0 = 2$ krypties koeficientą, t. y. funkcijos $g(x)$ išvestinę taške x_0:
$g'(x) = a \cdot \frac{1}{3x-1} \cdot (3x - 1)' = \frac{3a}{3x-1}$, $g'(2) = \frac{3a}{5}$.
Kadangi $g'(x_0)$ lygu tangentui kampo, kurį funkcijos grafiko liestinė taške x_0 sudaro su Ox ašimi ir $\operatorname{tg} 45° = 1$, tai $\frac{3a}{5} = 1$ ir $a = \frac{5}{3}$.

116. a) $f'(x) = \cos x + \frac{3}{x-3}$, $g'(x) = \cos x - x$; $\cos x + \frac{3}{x-3} > \cos x - x \Rightarrow x > 3$;
b) $f'(x) = x + \frac{3}{x-2} + e^{2x}$, $g'(x) = 6 + e^{2x}$; $x + \frac{3}{x-2} + e^{2x} > 6 + e^{2x} \Rightarrow 2 < x < 3$ ir $x > 5$.

5.4. Laipsninės funkcijos išvestinė

Pagaliau priartėjome prie išvestinių skaičiavimo teorijos pabaigos. Ir grįžome, galima sakyti, vos ne prie to paties, nuo ko pradėjome — prie formulės

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Verta atkreipti dėmesį, kad mažiems natūraliesiems skaičiams šią formulę įrodėme gana lengvai, tačiau plečiant šios „formulės galiojimo" ribas prisireikdavo vis daugiau ir daugiau žinių. Nors bendrosios formulės įrodymas ir yra labai trumpas, tačiau ko tik jame nepanaudojame: ir skaičių e, ir sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisykles, ir rodiklinės bei logaritminės funkcijos išvestines. Ir ne be reikalo. Paprastais būdais formulės gauti nepavyktų!

Žinome laipsninės funkcijos išvestinės formulę.

Mokame taikyti laipsninės funkcijos išvestinės formulę.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Kone visi pratimai skirti mokyti to paties: kad ir kaip būtų užrašyta funkcija, įžvelk joje laipsnines funkcijas ir diferencijuodamas pasinaudok laipsninės funkcijos išvestinės formule. Formulę jau sužinojome anksčiau, tik dabar jos taikymo sritis platesnė.

117. a) $\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$; b) $\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+2$; c) $-\frac{6}{x^4}$; d) $-\frac{5}{6x^6}$.

118. a) $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(1)=\frac{1}{3}$;
b) $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}$, $f'(0)=\frac{1}{4}$;
c) $f'(x)=-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, $f'(8)=-\frac{1}{48}$;
d) $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}\right)'=-\frac{1}{(\sqrt[4]{x}+1)^2}\cdot(\sqrt[4]{x}+1)'=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[4]{x}+1)^2}$,
$f'(0)$ neapibrėžta.

119. a) $f(0)=1$, $f'(x)=(x+1)^{-\frac{1}{3}}$, $f'(0)=1$; $f'(0)=f(0)$ — nelygybė teisinga;
b) $f(0)=1$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{(x+1)^4}}$, $f'(0)=1$; $f'(0)=f(0)$ — nelygybė teisinga.

120. *Nurodymas.* Šis pratimas skirtas diferencijavimo įgūdžiams ugdyti. Todėl nėra didelio reikalo stengtis gautą išvestinės išraišką suprastinti.
a) $f'(x)=\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{x}\right)'=(2\sqrt{x})'-\left(\frac{1}{x}\right)'+(\sqrt[4]{x})'=$
$2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$;
b) $f'(x)=\left(0{,}8\sqrt[4]{x}-\frac{10}{3}x^3+\frac{1}{5x^2}\right)'=\left(\frac{4}{5}\sqrt[4]{x}\right)'-\left(\frac{10}{3}x^3\right)'+\left(\frac{1}{5x^2}\right)'=$
$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}-\frac{10}{3}\cdot3x^2-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^4}\cdot(x^2)'=\frac{1}{5\sqrt[4]{x^3}}-10x^2-\frac{2}{5x^3}$;
c) $f'(x)=\left((\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x})^3\right)'=3(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x})^2\cdot(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x})'=$
$3(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x})^2\cdot\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;
d) $f'(x)=\left((\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^{12}\right)'=12(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^{11}\cdot(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})'=$
$12(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^{11}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)=12\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}\cdot\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}=$
$6\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}\cdot\frac{x-1}{x\sqrt{x}}=6\cdot\frac{(x+1)^{11}}{(\sqrt{x})^{11}}\cdot\frac{x-1}{x\sqrt{x}}=\frac{6}{x^7}(x+1)^{11}\cdot(x-1)$;
e) $f'(x)=\left(\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)\right)'=(\sqrt{x})'(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)'=\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=$
$1+\frac{1}{\sqrt{x}}$;
f) $f'(x)=(\sqrt[4]{3+2x^2})'=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{(3+2x^2)^3}}\cdot(3+2x^2)'=\frac{x}{\sqrt[4]{(3+2x^2)^3}}$.

6. FUNKCIJŲ IŠVESTINIŲ TAIKYMAI

Apie funkcijų išvestinių taikymą funkcijoms tirti žinome kone viską. Šio skyriaus paskirtis — susisteminti turimas žinias ir visas jas taikyti tiriant funkcijas.

6.1. Funkcijų tyrimas

Iki šiol braižydavome tik paprastų funkcijų grafikus. Nes tik tokias funkcijas esame ištyrę. Funkcijos turi daug įvairių savybių, ir tiriant funkciją galima kelti įvairius klausimus. Mums pakanka pačių paprasčiausių: kur funkcija didėja, kur mažėja, kur įgyja maksimumus, minimumus, kur kerta koordinačių ašis... Išskyrėme penkias funkcijų tyrimo uždavinio dalis (80 psl.). Gavus atsakymus į šiose dalyse suformuluotus klausimus galima apytiksliai nubraižyti funkcijos grafiką ir susidaryti tarsi „regimą" funkcijos vaizdą. Sausa formulė paverčiama grafiniu vaizdu.

Dažnai sakoma: funkcijos savybes galima nustatyti iš jos grafiko. Šnekant griežtai, iš grafiko savybės niekada nenustatomos. Veiksmas vyksta visada taip: ištyrus funkciją nustatomos jos savybės ir remiantis jomis nubraižomas grafikas, kuris patogia forma „koduoja" tas žinias, kurios įgytos. „Nustatant" funkcijos savybes iš grafiko, jos ne atrandamos, bet tik perskaitomos, prisimenamos. Žinoma, taikymuose funkcijos dažnai yra „apibrėžiamos grafiku", tada ir savybes galima iš tiesų nustatyti iš jo. Tačiau matematikoje visada būna kitaip: pirma funkcijos apibrėžimas, po to jau grafikas.

Suvokiame ir žinome funkcijos tyrimo uždavinio sudėtines dalis, matematinius įrankius.

Mokame:

žingsnis po žingsnio tirti funkciją;
užrašyti tyrimo rezultatus;
pagal tyrimo rezultatus nubraižyti grafiką.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Funkcijų tyrimas — tai viena sudėtingesnių temų mokykliniame matematikos kurse. Čia prireikia lygčių ir nelygybių sprendimo, įvairių funkcijų savybių žinojimo ir paprasčiausio išradingumo. Antra vertus, tai puiki priemonė mokyklinio kurso žinių sisteminimui.

Vadovėlyje pateikta gana daug įvairaus sunkumo bei įvairių funkcijų tyrimo uždavinių: 121 užduoties funkcijos yra daugianariai, 122 užduoties — racionaliosios funkcijos, 123 užduotyje panaudotos šaknų funkcijos, 124 — rodiklinės, 125 — logaritminės, 126 — trigonometrinės funkcijos. Juos visus išspręsti tikrai laiko neužteks. Būtų gerai, jei ištirtume bent po vieną šių rūšių egzempliorių. Bent jau daugianarius ir racionaliąsias funkcijas tirti turėtų išmokti visi. Sprendžiant šio skyrelio pratimus yra puiki galimybė pasirinkti uždavinius pagal mokinių pajėgumą, norą akcentuoti vienų ar kitų funkcijų savybes. Pagrindinis dėmesys ir turėtų būti sutelktas būtent į funkcijos savybes, o ne į atskiras funkcijų reikšmes.

Pateiktuose sutrumpintuose uždavinių sprendimuose funkcijos lyginumu mažai naudojomės — daugiau kontrolei. Tikimės, kad esant sąlygoms, mokytojai tuo naudosis plačiau.

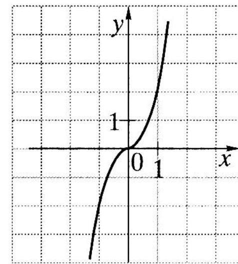
Tiriant rodiklinių ir logaritminių funkcijų elgesį, argumentui neaprėžtai augant, naudinga pasinaudoti ribomis: $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Paaiškinti šias ribas galima remiantis grafikais arba imant „patogių" argumentų seką, pavyzdžiui, $t=\frac{2n}{e^{2n}}$. Tada $\frac{t}{e^t}=\frac{2n}{e^{2n}}<\frac{2n}{2^{2n}}=2\cdot\frac{n}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}<2\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$ akivaizdžiai artėja prie nulio. Griežtesniu įrodymu, nors jis ir nėra sudėtingas, nebenorėjome moksleivių apsunkinti.

Įrodymas galėtų būti toks. $f(t)=\frac{t}{e^t}=e^{\ln\frac{t}{e^t}}=e^{\ln t-t}$. Bet $\ln t<\frac{1}{2}t$ „dideliems" t (funkcija $\ln t-\frac{1}{2}t$ taške $t=e^2$ įgyja neigiamą reikšmę $2-\frac{1}{2}e^2=\frac{1}{2}(2^2-e^2)<0$, o toliau mažėja, nes $(\ln t-\frac{1}{2}t)'=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}<0$). Todėl $f(t)=e^{\ln t-t}<e^{\frac{1}{2}t-t}=e^{-\frac{1}{2}t}$. Kadangi teigiama funkcija $e^{-\frac{1}{2}t}$ artėja į nulį, kai $t\to+\infty$, tai juo labiau artėja į nulį mažesnė teigiama funkcija $f(t)=\frac{t}{e^t}$.

Antroji riba suvedama į pirmą pakeitus $x=e^t$. Tada $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}$.

Beje, kai sakome, kad e^t didėja daug greičiau negu t, tai ir turime galvoje, kad santykis $\frac{t}{e^t}$ artėja į 0. Taip pat uždaviniuose dažnai naudosimės ir „apverstomis" ribomis $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$.

121. a) $p(x) = x^3 + x$.



1) Funkcija yra apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje, t. y. $D_p = \boldsymbol{R}$.

2) Kadangi $p(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -p(x)$, tai funkcija $p(x)$ yra nelyginė.

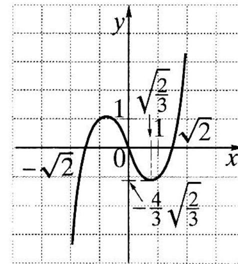
3) Kai $x = 0$, tai $p(0) = 0$. Lygtis $x^3 + x = 0$ turi vienintelį sprendinį $x = 0$. Taigi koordinačių ašis funkcijos $p(x)$ grafikas kerta vieninteliame taške $O(0; 0)$.

4) Nustatykime funkcijos $p(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus bei ekstremumus. Skaičiuojame funkcijos išvestinę: $p'(x) = 3x^2 + 1$. Matome, kad visoje apibrėžimo srityje funkcijos išvestinės reikšmės yra teigiamos, t. y. $p'(x) > 0$. Taigi funkcija yra didėjanti ir ekstremumų neturi.

5) Panagrinėkime funkcijos elgesį, kai $x \to +\infty$. Iškeliame x: $p(x) = x(x^2 + 1)$. Matome, kad x-ui neaprėžtai didėjant, funkcijos reikšmės taip pat neaprėžtai didėja, t. y. $p(x) \to +\infty$. Analogiškai, kai $p(x) \to -\infty$, tai $p(x) \to -\infty$.

Nubraižome funkcijos grafiką (žr. paraštėje).

b) $p(x) = x^3 - 2x$.



1) $D_p = \boldsymbol{R}$.

2) $p(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -p(x)$, funkcija yra nelyginė.

3) Kai $x = 0$, tai $p(0) = 0$. Randame lygties $x^3 - 2x = 0$ sprendinius: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$. Taigi funkcijos grafikas koordinačių ašis kerta taškuose $(0; 0)$, $(-\sqrt{2}; 0)$ ir $(\sqrt{2}; 0)$.

4) $p'(x) = 3x^2 - 2$;

$p'(x) = 0$, kai $3x^2 - 2 = 0$, t. y. kai $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ir $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

$p'(x) > 0$, kai $3x^2 - 2 > 0 \Rightarrow \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ir $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$ yra funkcijos reikšmių didėjimo intervalai;

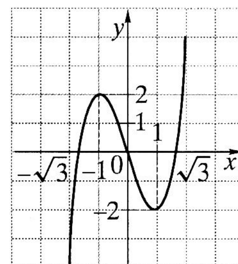
$p'(x) < 0$, kai $3x^2 - 2 < 0 \Rightarrow \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ yra funkcijos reikšmių mažėjimo intervalas.

Sudarykime lentelę:

x	$\left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$
$p'(x)$	$p'(x) > 0$	0	$p'(x) < 0$	0	$p'(x) > 0$
$p(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, max	$\searrow$	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, min	$\nearrow$

5) Kai $x \to +\infty$, tai $p(x) = x(x^2 - 2) \to +\infty$;
kai $x \to -\infty$, tai $p(x) = x(x^2 - 2) \to -\infty$.

c) $p(x) = x^3 - 3x$.



1) $D_p = \boldsymbol{R}$.

2) $p(-x) = -p(x)$, funkcija yra nelyginė.

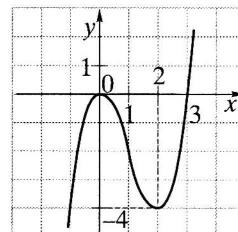
3) Funkcijos grafikas koordinačių ašis kerta taškuose $(0; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; 0)$.

4) $p'(x) = 3x^2 - 3$; $p'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$;
$p'(x) > 0$, kai $x < -1$ ir $x > 1$; $p'(x) < 0$, kai $-1 < x < 1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$p'(x)$	$p'(x) > 0$	0	$p'(x) < 0$	0	$p'(x) > 0$
$p(x)$	$\nearrow$	2, max	$\searrow$	-2, min	$\nearrow$

5) Kai $x \to +\infty$, tai $p(x) = x(x^2 - 3) \to +\infty$;
kai $x \to -\infty$, tai $p(x) = x(x^2 - 3) \to -\infty$.

d) $p(x) = x^3 - 3x^2$.



1) $D_p = \boldsymbol{R}$.

2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Funkcijos grafikas koordinačių ašis kerta taškuose $(0; 0)$, $(3; 0)$.

4) $p'(x) = 3x^2 - 6x$; $p'(x) = 0$, kai $x_1 = 0$ ir $x_2 = 2$;
$p'(x) > 0$, kai $x < 0$ ir $x > 2$; $p'(x) < 0$, kai $0 < x < 2$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$p'(x)$	$p'(x) > 0$	0	$p'(x) < 0$	0	$p'(x) > 0$
$p(x)$	$\nearrow$	0, max	$\searrow$	-4, min	$\nearrow$

5) Kai $x \to +\infty$, tai $p(x) = x^2(x - 3) \to +\infty$;
kai $x \to -\infty$, tai $p(x) = x^2(x - 3) \to -\infty$.

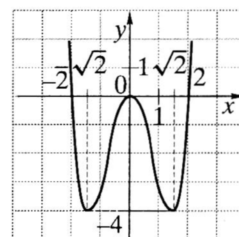
e) $p(x) = x^2(x^2 - 4)$.

1) $D_p = \boldsymbol{R}$.

2) $p(-x) = p(x)$, funkcija yra lyginė.

3) Funkcijos grafikas koordinačių ašis kerta taškuose (0; 0), (−2; 0) ir (2; 0).

4) $p'(x) = 4x^3 - 8x$; $p'(x) = 0$, kai $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$ ir $x_3 = \sqrt{2}$;
$p'(x) > 0$, kai $-\sqrt{2} < x < 0$ ir $x > \sqrt{2}$;
$p'(x) < 0$, kai $x < -\sqrt{2}$ ir $0 < x < \sqrt{2}$.



x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; 0)$	0	$(0; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$p'(x)$	$p'(x) < 0$	0	$p'(x) > 0$	0	$p'(x) < 0$	0	$p'(x) > 0$
$p(x)$	↘	−4, min	↗	0, max	↘	−4, min	↗

5) Kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$, tai $p(x) \to +\infty$.

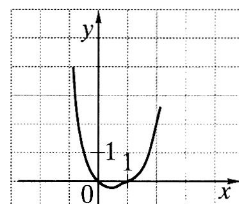
f) $p(x) = x(x-1)^3$.

1) $D_p = \boldsymbol{R}$.

2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Funkcijos grafikas koordinačių ašis kerta taškuose (0; 0) ir (1; 0).

4) $p'(x) = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1)$;
$p'(x) = 0$, kai $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{4}$;
$p'(x) > 0$, kai $\frac{1}{4} < x < 1$ ir $x > 1$; $p'(x) < 0$, kai $x < \frac{1}{4}$.

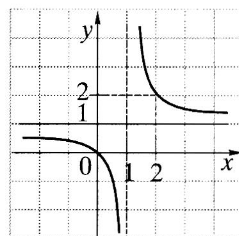


x	$\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}; 1\right)$	1	$(1; +\infty)$
$p'(x)$	$p'(x) < 0$	0	$p'(x) > 0$	0	$p'(x) > 0$
$p(x)$	↘	$-\frac{27}{256}$, min	↗	0, ekstremumo nėra	↗

5) Kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$, tai $p(x) \to +\infty$.

122. *Nurodymas.* Sprendžiant šio uždavinio a) ir b) punktus, naudinga funkciją pertvarkyti — nurodytų funkcijų grafikai yra hiperbolės.

a) $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. Matome, kad funkcijos $f(x)$ grafikas — hiperbolė $y = \frac{1}{x}$, pastumta per 1 į viršų ir per 1 į dešinę.



1) $D_f = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

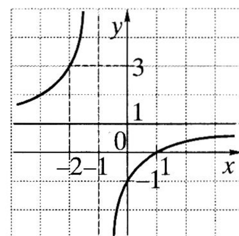
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Funkcijos grafikas koordinačių ašis kerta vieninteliame taške (0; 0).

4) $f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{x'(x-1)-x(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$. Matome, kad visoje apibrėžimo srityje funkcijos išvestinės reikšmės yra neigiamos, t. y. $f'(x) < 0$. Taigi funkcija yra mažėjanti ir ekstremumų neturi.

5) Kai $x \to +\infty$, tai $\frac{1}{x-1} \to 0$, o $f(x) \to 1$.
Analogiškai rastume, kad kai $x \to -\infty$, tai $f(x) \to 1$.

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ (grafikas — hiperbolė $y = -\frac{2}{x}$ pastumta per 1 į viršų ir per 1 į kairę).



1) $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

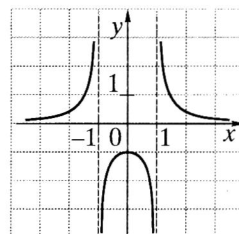
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Funkcijos grafikas koordinačių ašis kerta taškuose (0; −1) ir (1; 0).

4) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. Matome, kad visoje apibrėžimo srityje $f'(x) > 0$. Taigi funkcija yra didėjanti ir ekstremumų neturi.

5) Kai $x \to +\infty$ arba $x \to -\infty$, tai $\frac{2}{x+1} \to 0$, o $f(x) \to 1$.

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.



1) $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) $f(-x) = f(x)$, funkcija yra lyginė.

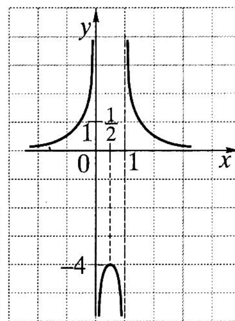
3) Funkcijos grafikas koordinačių ašis kerta taške (0; −1).

4) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$; $f'(x) = 0$, kai $x = 0$;
$f'(x) > 0$, kai $x < -1$ ir $-1 < x < 0$; $f'(x) < 0$, kai $0 < x < 1$ ir $x > 1$.

x	$(-\infty; -1)$	−1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	—	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	—	$f'(x) < 0$
$f(x)$	↗	—	↗	−1, max	↘	—	↘

5) Kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$, tai $f(x) \to 0$; kai $x \to 1$ $(x > 1)$, tai $f(x) \to +\infty$; kai $x \to 1$ $(x < 1)$, tai $f(x) \to -\infty$; kai $x \to -1$ $(x < -1)$, tai $f(x) \to +\infty$; kai $x \to -1$ $(x > -1)$, tai $f(x) \to -\infty$.

d) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$.



1) $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Funkcijos grafikas nekerta koordinačių ašių.
4) $f'(x) = \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2}$; $f'(x) = 0$, kai $x = \frac{1}{2}$;
$f'(x) > 0$, kai $x < 0$ ir $0 < x < \frac{1}{2}$; $f'(x) < 0$, kai $\frac{1}{2} < x < 1$ ir $x > 1$.

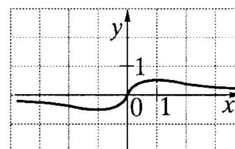
x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	—	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	—	$f'(x) < 0$
$f(x)$	↗	—	↗	-4, max	↘	—	↘

Nurodymas. Naudinga pastebėti, kad $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$.

Iš čia matyti, kad funkcijos grafikas simetriškas tiesės $x = \frac{1}{2}$ atžvilgiu ir įgyja maksimumą taške $x = \frac{1}{2}$.

5) Kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$, tai $f(x) \to 0$.

e) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

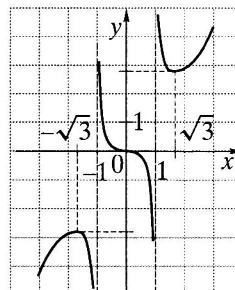


1) $D_f = \boldsymbol{R}$.
2) $f(-x) = -f(x)$, funkcija yra nelyginė.
3) Funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis vieninteliame taške $(0; 0)$.
4) $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; $f'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$;
$f'(x) > 0$, kai $-1 < x < 1$; $f'(x) < 0$, kai $x < -1$ ir $x > 1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$, min	↗	$\frac{1}{2}$, max	↘

5) Kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$, tai $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{x}} \to 0$.

f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

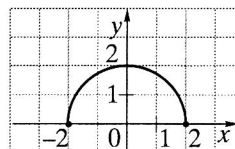


1) $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.
2) Funkcija yra nelyginė.
3) Funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis taške $(0; 0)$.
4) $f'(x) = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$; $f'(x) = 0$, kai $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$ ir $x_3 = \sqrt{3}$;
$f'(x) > 0$, kai $x < -\sqrt{3}$ ir $x > \sqrt{3}$;
$f'(x) < 0$, kai $-\sqrt{3} < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ ir $1 < x < \sqrt{3}$.

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	—	$f'(x) < 0$	0
$f(x)$	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, max	↘	—	↘	0, ekstremumo nėra
x	$(0; 1)$	1	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$	
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	—	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$	
$f(x)$	↘	—	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$, min	↗	

5) Kai $x \to +\infty$, tai $f(x) = \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}} \to +\infty$; kai $x \to -\infty$,
tai $f(x) = \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}} \to -\infty$; kai $x \to 1$ $(x > 1)$, tai $f(x) \to +\infty$;
kai $x \to 1$ $(x < 1)$, $f(x) \to -\infty$.

123. a) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$.

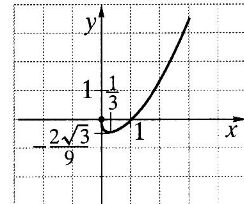


1) Funkcija apibrėžta su tais x, su kuriais $4 - x^2 \geqslant 0$, t. y. $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
Taigi $D_g = [-2; 2]$.
2) Funkcija yra lyginė.
3) Funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis taškuose $(0; 2)$, $(-2; 0)$ ir $(2; 0)$.
4) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (4-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $g'(x) = 0$, kai $x = 0$;
$g'(x) > 0$, kai $-2 < x < 0$; $g'(x) < 0$, kai $0 < x < 2$.

x	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2
$g'(x)$	—	$g'(x) > 0$	0	$g'(x) > 0$	—
$g(x)$	0	↗	2, max	↘	0

Kita vertus, iš lygybės $y = \sqrt{4 - x^2}$, keldami abi puses kvadratu, gauname $x^2 + y^2 = 2^2$. Vadinasi, mūsų funkcijos grafikas — apskritimo lanko viršutinė dalis.

b) $g(x) = (x - 1)\sqrt{x}$.

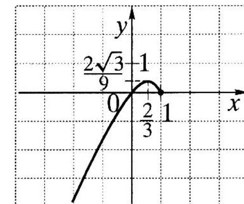


1) $D_g = [0; +\infty)$.
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis taškuose $(0; 0)$, $(1; 0)$.
4) $g'(x) = (x - 1)'\sqrt{x} + (x - 1)(\sqrt{x})' = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$; $g'(x) = 0$, kai $x = \frac{1}{3}$;
$g'(x) > 0$, kai $x > \frac{1}{3}$; $g'(x) < 0$, kai $0 < x < \frac{1}{3}$.

x	0	$(0; \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}; +\infty)$
$g'(x)$	—	$g'(x) < 0$	0	$g'(x) > 0$
$g(x)$	0	↘	$\frac{-2\sqrt{3}}{9}$, min	↗

5) Kai $x \to +\infty$, tai $g(x) \to +\infty$.

c) $g(x) = x\sqrt{1 - x}$.

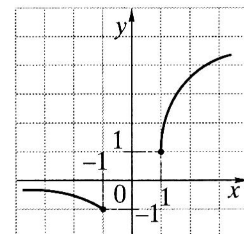


1) $D_g = (-\infty; 1]$.
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis taškuose $(0; 0)$, $(1; 0)$.
4) $g'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$; $g'(x) = 0$, kai $x = \frac{2}{3}$;
$g'(x) > 0$, kai $x < \frac{2}{3}$; $g'(x) < 0$, kai $\frac{2}{3} < x < 1$.

x	$(-\infty; \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}; 1)$	1
$g'(x)$	$g'(x) > 0$	0	$g'(x) < 0$	—
$g(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$, max	↘	0

5) Kai $x \to -\infty$, tai $g(x) \to -\infty$.

d) $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

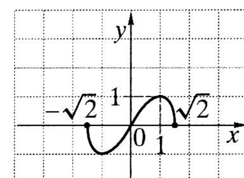


1) $D_g = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Funkcijos grafikas nekerta koordinačių ašių.
4) $g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $g'(x) \neq 0$, vadinasi, funkcija ekstremumų neturi;
$g'(x) > 0$, kai $x > 1$; $g'(x) < 0$, kai $x < -1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$g'(x)$	$g'(x) < 0$	—	—	—	$g'(x) > 0$
$g(x)$	↘	-1	—	1	↗

5) Kai $x \to +\infty$, tai $g(x) \to +\infty$. Panagrinėkime funkcijos elgesį, kai $x \to -\infty$. Tuo tikslu pertvarkykime funkciją: $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$. Dabar matyti, kad kai $x \to -\infty$, tai $g(x) \to 0$. Galime atkreipti dėmesį: kai $x \to 1$ $(x > 1)$, tai $g'(x)$ neaprėžtai auga. Vadinasi, funkcijos $g(x)$ grafikas iš taško $(1; 1)$ „šauna“ su vertikalia liestine! Panašiai ir taške $x = -1$.

e) $g(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.



1) $D_g = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
2) Funkcija yra nelyginė.
3) Funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis taškuose $(0; 0)$, $(-\sqrt{2}; 0)$ ir $(\sqrt{2}; 0)$.
4) $g'(x) = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$; $g'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$;
$g'(x) > 0$, kai $-1 < x < 1$; $g'(x) < 0$, kai $-\sqrt{2} < x < -1$ ir $1 < x < \sqrt{2}$.

x	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$	—	$g'(x) < 0$	0	$g'(x) > 0$	0	$g'(x) < 0$	—
$g(x)$	0	↘	-1, min	↗	1, max	↘	0

Intervalo $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ galuose grafiko liestinės vertikalios, nes funkcija $g(x)$ neaprėžtai auga, kai $x \to \sqrt{2}$ arba $x \to -\sqrt{2}$.

f) $g(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$.

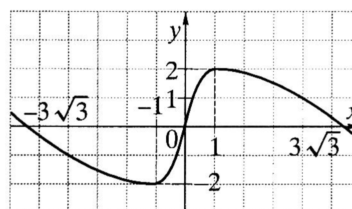
1) $D_g = \boldsymbol{R}$. (*Nurodymas.* Čia gera proga prisiminti, kad funkcija $g_1(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + x$ būtų apibrėžta tik intervale $[0; +\infty)$.)

2) Funkcija yra nelyginė.

3) Funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis taškuose $(0; 0)$, $(-3\sqrt{3}; 0)$ ir $(3\sqrt{3}; 0)$.

4) $g'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1$; $g'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$. Taškas $x = 0$ — taip pat kritinis (jame išvestinė neapibrėžta). Tačiau pereidamos šį tašką išvestinės reikšmės ženklo nekeičia.

$g'(x) > 0$, kai $-1 < x < 1$; $g'(x) < 0$, kai $x < -1$ ir $x > 1$.



x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$g'(x)$	$g'(x) < 0$	0	$g'(x) > 0$	0	$g'(x) < 0$
$g(x)$	↘	-2, min	↗	2, max	↘

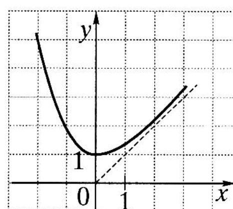
5) Kai $x \to +\infty$, tai $g(x) = \sqrt[3]{x}(3 - \sqrt[3]{x^2}) \to -\infty$;
kai $x \to -\infty$, tai $g(x) = \sqrt[3]{x}(3 - \sqrt[3]{x^2}) \to +\infty$.

124. a) $f(x) = x + e^{-x}$.

1) $D_f = \boldsymbol{R}$.

2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Kai $x = 0$, tai $f(0) = 0 + e^0 = 1$. Taigi funkcijos grafikas kerta Oy ašį taške $(0; 1)$. Ox ašies funkcijos grafikas nekerta.



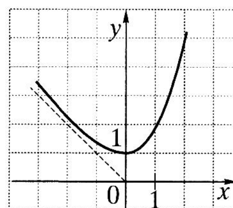
4) $f'(x) = (x + e^{-x})' = x' + (e^{-x})' = 1 + e^{-x} \cdot (-x)' = 1 - e^{-x}$;
$f'(x) = 0$, kai $1 - e^{-x} = 0$, $1 - \frac{1}{e^x} = 0$, $e^x - 1 = 0$, $e^x = 1$, $x = 0$;
$f'(x) > 0$, kai $1 - e^{-x} > 0$, $1 - \frac{1}{e^x} > 0$, $e^x - 1 > 0$, $e^x > 1$, $x > 0$;
$f'(x) < 0$, kai $x < 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	↘	1, min	↗

Kadangi $f(0) = 1$ (min), tai funkcija reikšmės 0 niekur neįgyja.

5) Kai $x \to +\infty$, tai $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \to 0$ ir $f(x) \to +\infty$.
Kai $x \to -\infty$, tai $f(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}} + 1\right) \to +\infty$, nes $\frac{x}{e^{-x}} = -\frac{-x}{e^{-x}} \to 0$.

b) $f(x) = e^x - x$. *Nurodymas.* Funkcija $f(x)$ gauta iš funkcijos $y = x + e^{-x}$ (žr. a) punktą) vietoj x įrašius $-x$. Taigi jos grafikas gaunamas iš funkcijos $y = x + e^{-x}$ grafiko vaizduojant jį simetriškai y ašiai.



1) $D_f = \boldsymbol{R}$.

2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

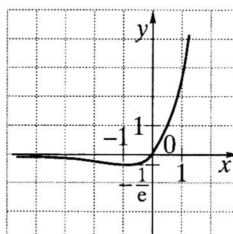
3) Kai $x = 0$, tai $f(0) = e^0 - 0 = 1$. Taigi funkcijos grafikas kerta Oy ašį taške $(0; 1)$. Ox ašies funkcijos grafikas nekerta.

4) $f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$; $f'(x) = 0$, kai $e^x - 1 = 0$, $x = 0$;
$f'(x) > 0$, kai $x > 0$; $f'(x) < 0$, kai $x < 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	↘	1, min	↗

5) Kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$, tai $f(x) \to +\infty$.

c) $f(x) = xe^x$.



1) $D_f = \boldsymbol{R}$.

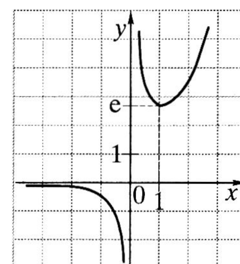
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Kai $x = 0$, tai $f(0) = 0$. Taškas $(0; 0)$ — vienintelis taškas, kuriame funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis.

4) $f'(x) = (xe^x)' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$;
$f'(x) = 0$, kai $1 + x = 0$, $x = -1$ ($e^x > 0$ su visais x);
$f'(x) > 0$, kai $e^x(1 + x) > 0$, $1 + x > 0$, $x > -1$;
$f'(x) < 0$, kai $x < -1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$, min	↗

5) Kai $x \to +\infty$, tai $f(x) \to +\infty$; kai $x \to -\infty$, tai $f(x) \to 0$, nes $xe^x = \frac{x}{e^{-x}}$, o vardiklyje esanti rodiklinė funkcija e^{-x}, kai $x \to -\infty$, didėja daug greičiau negu $|x|$.



d) $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1) $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Funkcijos grafikas koordinačių ašių nekerta ($f(0)$ — neegzistuoja; $e^x > 0$ su visais x).

4) $f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot x'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$;

$f'(x) = 0$, kai $x - 1 = 0$, $x = 1$;

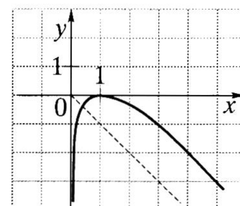
$f'(x) > 0$, kai $x > 1$;

$f'(x) < 0$, kai $x < 0$ ir $0 < x < 1$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	—	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	↘	—	↘	e, min	↗

5) Kai $x \to +\infty$, tai $f(x) \to +\infty$; kai $x \to -\infty$, tai $f(x) \to 0$; kai $x \to 0$ $(x < 0)$, tai $f(x) \to -\infty$; kai $x \to 0$ $(x > 0)$, tai $f(x) \to +\infty$.

125. *Nurodymas.* Tiriant logaritmines funkcijas moksleiviams gali iškilti sunkumų ieškant funkcijų nulių (a) ir b) punktai — jie paaiškėja vėliau). Tiriant logaritminės funkcijos elgesį argumentui neaprėžtai augant, naudinga pasinaudoti riba: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ $(x = e^t)$. Šios ribos skaičiavimas neįeina į mokyklinį kursą, bet faktas, kad eksponentinė funkcija auga žymiai greičiau už tiesinę, turėtų būti mokiniams numanomas iš funkcijų savybių (žr. taip pat skyrelio pradžią).



a) $g(x) = \ln x - x + 1$.

1) $D_g = (0; +\infty)$.

2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Funkcijos grafikas kerta Ox ašį taške $(1; 0)$.

4) $g'(x) = (\ln x - x + 1)' = (\ln x)' - x' + 1' = \frac{1}{x} - 1$;

$g'(x) = 0$, kai $\frac{1}{x} - 1 = 0$, $1 - x = 0$, $x = 1$;

$g'(x) > 0$, kai $\frac{1}{x} - 1 > 0$, $\frac{1-x}{x} > 0$, $0 < x < 1$;

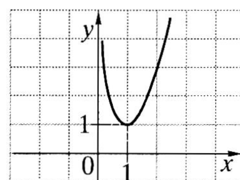
$g'(x) < 0$, kai $\frac{1}{x} - 1 < 0$, $\frac{1-x}{x} < 0$, $x > 1$ ($x < 0$ netinka, nes nepriklauso funkcijos apibrėžimo sričiai).

x	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$g'(x)$	$g'(x) > 0$	0	$g'(x) < 0$
$g(x)$	↗	0, max	↘

5) Kai $x \to +\infty$, tai $g(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) \to -\infty$, nes reiškinys skliaustuose artėja į -1.

Kai $x \to 0$ $(x > 0)$, tai $g(x) \to -\infty$, nes $\ln x \to -\infty$.

Kai $x \to 0$ $(x > 0)$, tai $g(x) \to -\infty$.



b) $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1) $D_g = (0; +\infty)$.

2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Funkcijos grafikas nekerta koordinačių ašių.

4) $g'(x) = (x^2 - 2\ln x)' = (x^2)' - 2(\ln x)' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$;

$g'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$. Taškas $x = -1$ nepriklauso funkcijos apibrėžimo sričiai, vadinasi, funkcija turi vieną kritinį tašką $x = 1$.

$g'(x) > 0$, kai $x > 1$;

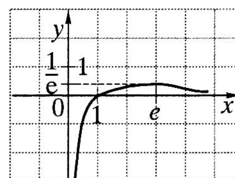
$g'(x) < 0$, kai $0 < x < 1$.

x	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$g'(x)$	$g'(x) < 0$	0	$g'(x) > 0$
$g(x)$	↘	1, min	↗

Kadangi $f(1) = 1$ (min), tai funkcija nulių neturi.

5) Kai $x \to +\infty$, tai $g(x) = x\left(x - 2\frac{\ln x}{x}\right) \to +\infty$; kai $x \to 0$ $(x > 0)$, tai $g(x) \to +\infty$, nes $\ln x \to -\infty$.

c) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

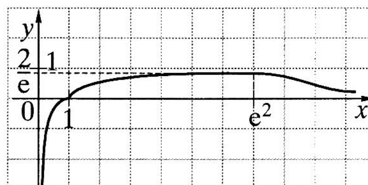


1) $D_g = (0; +\infty)$.
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Kadangi $x \neq 0$, tai funkcijos grafikas Oy ašies nekerta.
Kadangi $g(x) = 0$, kai $\ln x = 0$, $x = 1$, tai funkcijos grafikas kerta Ox ašį taške $(1; 0)$.
4) $g'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$;
$g'(x) = 0$, kai $\ln x = 1$, $x = \mathrm{e}$;
$g'(x) > 0$, kai $1 - \ln x > 0$, $\ln x < 1$, $0 < x < \mathrm{e}$; $g'(x) < 0$, kai $x > \mathrm{e}$.

x	$(0; \mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e}; +\infty)$
$g'(x)$	$g'(x) > 0$	0	$g'(x) < 0$
$g(x)$	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$, max	↘

5) Kai $x \to +\infty$, tai $g(x) \to 0$; kai $x \to 0$ $(x > 0)$, tai $g(x) \to -\infty$ (galima aiškinti imant seką $x_n = \frac{1}{n}$, tada $g(x) = n \ln \frac{1}{n} = -n \ln n$).

d) $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

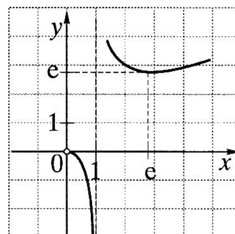


1) $D_g = (0; +\infty)$.
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Funkcijos grafikas Oy ašies nekerta, o Ox ašį kerta taške $(1; 0)$ $\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0, \ln x = 0, x = 1\right)$.
4) $g'(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x(2 - \ln x)}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$;
$g'(x) = 0$, kai $2 - \ln x = 0$, $\ln x = 2$, $x = \mathrm{e}^2$;
$g'(x) > 0$, kai $0 < x < \mathrm{e}^2$; $g'(x) < 0$, kai $x > \mathrm{e}^2$.

x	$(0; \mathrm{e}^2)$	e^2	$(\mathrm{e}^2; +\infty)$
$g'(x)$	$g'(x) > 0$	0	$g'(x) < 0$
$g(x)$	↗	$\frac{2}{\mathrm{e}}$, max	↘

5) Kai $x \to +\infty$, tai $g(x) \to 0$ (galima aiškinti imant $x_n = n^2$, tada $g(x_n) = \frac{\ln n^2}{n} = \frac{2 \ln n}{n}$); kai $x \to 0$ $(x > 0)$, tai $g(x) \to -\infty$ (galima imti $x_n = \frac{1}{n^2}$, tada $g(x_n) = -n \ln n^2$).

e) $g(x) = \frac{x}{\ln x}$.

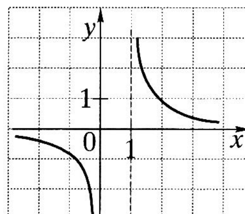


1) $D_g = (0; 1) \cup (1; +\infty)$.
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Funkcijos grafikas nekerta koordinačių ašių.
4) $g'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{x' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$;
$g'(x) = 0$, kai $\ln x - 1 = 0$, $\ln x = 1$, $x = \mathrm{e}$;
$g'(x) > 0$, kai $x > \mathrm{e}$; $g'(x) < 0$, kai $0 < x < 1$ ir $1 < x < \mathrm{e}$.

x	$(0; 1)$	1	$(1; \mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e}; +\infty)$
$g'(x)$	$g'(x) < 0$	—	$g'(x) < 0$	0	$g'(x) > 0$
$g(x)$	↘	—	↘	e, min	↗

5) Kai $x \to +\infty$, tai $g(x) \to +\infty$; kai $x \to 0$ $(x > 0)$, tai $g(x) \to 0$; kai $x \to 1$ $(x > 1)$, tai $g(x) \to +\infty$; kai $x \to 1$ $(x < 1)$, tai $g(x) \to -\infty$.

f) $g(x) = \ln \frac{x}{x-1}$.



1) Funkcija apibrėžta su tais x, su kuriais $\frac{x}{x-1} > 0$ ir $x - 1 \neq 0$. Taigi $D_g = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Funkcijos grafikas nekerta koordinačių ašių.
4) $g'(x) = \left(\ln \frac{x}{x-1}\right)' = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x' \cdot (x-1) - x \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(1-x)}$;
$g'(x) \neq 0$, vadinasi, funkcija neturi kritinių taškų, o kartu ir ekstremumų;
$g'(x) > 0$, kai $x(1 - x) > 0$, $0 < x < 1$, tačiau šie x nepriklauso D_g;
$g'(x) < 0$, kai $x < 0$ ir $x > 1$. Taigi visoje apibrėžimo srityje funkcija yra mažėjanti.
5) Kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$, tai $g(x) \to 0$ (nes tada $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \to 1$);
kai $x \to 0$ $(x < 0)$, tai $g(x) \to -\infty$; kai $x \to 1$ $(x > 1)$, tai $g(x) \to +\infty$.

126. a) $h(x) = \sin^2 x$. Funkcija yra periodinė. Jos periodas π. Galima funkciją ištirti π ilgio intervale, pvz., $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Tačiau funkcija lyginė, todėl pakanka ją nagrinėti intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ištyrę funkciją ir nubraižę jos grafiką intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, simetriškai y ašiai galėsime nubraižyti grafiką ir intervale $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. O tada šią π ilgio grafiko dalį atkartoję intervaluose $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ ir t. t. turėsime funkcijos $h(x)$ grafiką.

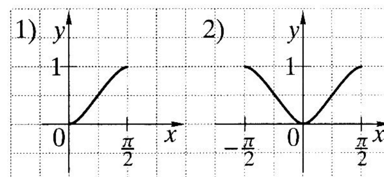
1) $D_h = \boldsymbol{R}$.

2) $h(-x) = \sin^2(-x) = \sin^2 x = h(x)$, funkcija yra lyginė.

3) Kai $x = 0$, tai $h(0) = 0$. Lygties $\sin^2 x = 0$ sprendiniai yra $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Intervalui $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ priklauso sprendinys $x = 0$ $(k = 0)$. Taigi funkcijos grafikas intervale $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kerta koordinačių ašis taške (0; 0).

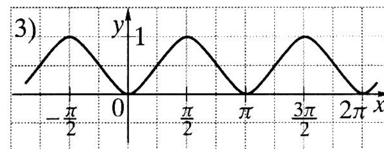
4) $h'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$;

$h'(x) = 0$, kai $\sin 2x = 0$, $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Intervalui $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ priklauso sprendiniai $x = 0$ ir $x = \frac{\pi}{2}$. Šie taškai yra funkcijos $h(x)$ kritiniai taškai intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



$h'(x) > 0$, kai $\sin 2x > 0$, $2\pi k < 2x < \pi + 2\pi k$, $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Intervalui $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ priklauso sprendinys $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Taigi šiame intervale funkcija $h(x)$ didėja.

$h'(x) < 0$, kai $\sin 2x < 0$, $\pi + 2\pi k < 2x < 2\pi + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Intervalui $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nepriklauso nė vienas sprendinys.



$h(0) = 0$ — mažiausia funkcijos reikšmė intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ — didžiausia funkcijos reikšmė intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Nubraižome funkcijos $h(x) = \sin^2 x$ grafiką intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (žr. paraštėje 1)) ir šį grafiką atvaizduojame simetriškai Oy ašiai (žr. paraštėje 2)). Braižome funkcijos $h(x) = \sin^2 x$ grafiką (žr. paraštėje 3)).

b) $h(x) = \sin x - \sin^2 x$. Funkcija yra periodinė. Jos periodas 2π. Nagrinėkime funkciją $h(x)$ intervale $[0; 2\pi]$.

1) $D_h = \boldsymbol{R}$.

2) $h(-x) = \sin(-x) - \sin^2(-x) = -\sin x - \sin^2 x$, funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

3) Kai $x = 0$, tai $h(0) = 0$. Funkcijos $h(x)$ reikšmė lygi nuliui, kai $\sin x - \sin^2 x = 0$, $\sin x(1 - \sin x) = 0$, $\sin x = 0$ arba $\sin x = 1$, $x = \pi k$ arba $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Intervalui $[0; 2\pi]$ priklauso sprendiniai $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ ir $x = 2\pi$ — šiuose taškuose grafikas kerta x ašį.

4) $h'(x) = (\sin x - \sin^2 x)' = (\sin x)' - (\sin^2 x)' = \cos x - 2\sin x\cos x$;

$h'(x) = 0$, kai $\cos x - 2\sin x\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Rightarrow$ $\cos x = 0$ arba $1 - 2\sin x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ arba $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Intervalui $[0; 2\pi]$ priklauso sprendiniai $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ ir $x = \frac{3\pi}{2}$.

$h'(x) > 0$, kai $\cos x(1 - 2\sin x) > 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ 1 - 2\sin x > 0 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} \cos x < 0, \\ 1 - 2\sin x < 0. \end{cases}$$

Iš pirmos nelygybių sistemos gauname, kad funkcija yra didėjanti intervaluose $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{13\pi}{6} + 2\pi k$, o iš antros — didėjanti intervaluose $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Intervalui $[0; 2\pi]$ priklauso sprendiniai $0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$ ir $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$.

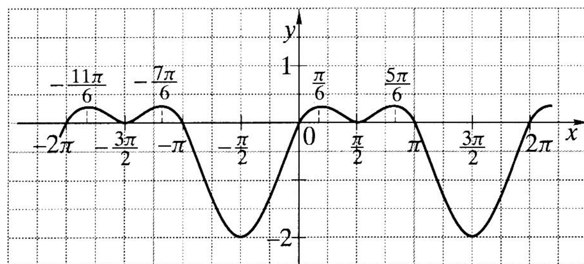
$h'(x) < 0$, kai $\cos x(1 - 2\sin x) < 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos x < 0, \\ 1 - 2\sin x > 0 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} \cos x > 0, \\ 1 - 2\sin x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \text{ ir}$$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — šiuose intervaluose funkcija yra mažėjanti. Intervalui $[0; 2\pi]$ priklauso sprendiniai $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$.

$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = h\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ (max), $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (min), $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$ (min).

Nubraižę grafiką intervale $[0; 2\pi]$, toliau periodiškai tęsiame:



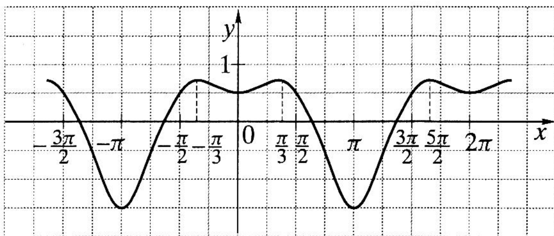
c) $h(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$. Funkcija yra periodinė. Jos periodas 2π, todėl pakanka nagrinėti funkciją intervale $[0; \pi]$. Panagrinėkime funkciją $h(x)$ visoje jos apibrėžimo srityje.

1) $D_h = \boldsymbol{R}$.

2) $h(-x) = \cos(-x) - \frac{1}{2}\cos(-2x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x = h(x)$, funkcija yra lyginė.

3) Kai $x = 0$, $h(0) = \cos 0 - \frac{1}{2}\cos 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Taigi funkcijos grafikas kerta Oy ašį taške $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. $\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x = 0$, $\cos x - \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) = 0$, $-\cos^2 x + \cos x + \frac{1}{2} = 0$, $2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$. Pažymėkime $\cos x = m$. Tada $2m^2 - 2m - 1 = 0$, $m_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ir $m_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Kai $\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, tai $x = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Lygtis $\cos x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ sprendinių neturi, nes $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$. Taigi funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis taškuose $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ ir $\left(\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}; 0\right)$.

4) $h'(x) = \left(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)' = -\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x \cdot (2x)' = -\sin x + \sin 2x$;
$h'(x) = 0$, kai $-\sin x + \sin 2x = 0 \Rightarrow -\sin x + 2\sin x\cos x = 0 \Rightarrow$
$\sin x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ arba $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$x = \pi k$ arba $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
$h'(x) > 0$, kai $\sin x(2\cos x - 1) > 0 \Rightarrow$
$\begin{cases} \sin x > 0, \\ 2\cos x - 1 > 0 \end{cases}$ arba $\begin{cases} \sin x < 0, \\ 2\cos x - 1 < 0. \end{cases}$
Iš pirmos nelygybių sistemos gauname, kad funkcija yra didėjanti intervaluose $2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, o iš antros — funkcija yra didėjanti intervaluose $\pi + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
$h'(x) < 0$, kai $\sin x(2\cos x - 1) < 0 \Rightarrow$
$\begin{cases} \sin x < 0, \\ 2\cos x - 1 > 0 \end{cases}$ arba $\begin{cases} \sin x > 0, \\ 2\cos x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < 2\pi k$ ir $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — šiuose intervaluose funkcija yra mažėjanti. $h(0) = \frac{1}{2}$ (min), $h(\pi) = -\frac{3}{2}$ (min), $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$ (max).
Funkcijos $h(x)$ grafikas:



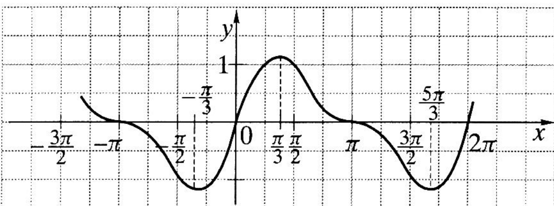
d) $h(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$. Funkcija yra periodinė. Jos periodas 2π. Panagrinėkime funkciją $h(x)$ visoje jos apibrėžimo srityje.

1) $D_h = \boldsymbol{R}$.

2) $h(-x) = \sin(-x) + \frac{1}{2}\sin(-2x) = -\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = -h(x)$, funkcija yra nelyginė.

3) Kai $x = 0$, $h(0) = \sin 0 + \frac{1}{2}\sin 0 = 0$. Taigi funkcijos grafikas eina per tašką $(0; 0)$. $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$, $\sin x + \sin x\cos x = 0$, $\sin x(1 + \cos x) = 0$, $\sin x = 0$, arba $\cos x = -1$, $x = \pi k$ arba $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Taigi funkcijos grafikas kerta Ox ašį taškuose $(\pi k, k \in \boldsymbol{Z}; 0)$.

4) $h'(x) = \left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \cos x + \cos 2x$;
$h'(x) = 0$, kai $x = \pi + 2\pi k$ ir $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
$h'(x) > 0$, kai $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
$h'(x) < 0$, kai $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ ir $\pi + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Taškuose $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ funkcija įgyja maksimumus, lygius $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; taškuose $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ — minimumus, lygius $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
Funkcijos $h(x)$ grafikas:



6.2. Funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmė uždarame intervale

Visa šio skyrelio teorija sutelkta vieninteliame brėžinyje ir vieninteliame sakinyje prie jo. Gerai įsižiūrėkime į tą brėžinį ir tada jau pabandykime suformuluoti funkcijos didžiausios ir mažiausios reikšmės uždarame intervale ieškojimo žingsnius:

1) randame funkcijos kritinius taškus;

2) užsirašome tuos, kurie patenka į mūsų uždarą intervalą;

3) prie užsirašytųjų kritinių taškų dar pridedame ir intervalo galų taškus;

4) skaičiuojame funkcijos reikšmes užsirašytuose taškuose ir išrenkame mažiausiąją ir didžiausiąją.

Štai ir visas sprendimas. Nei mažiausioji, nei didžiausioji reikšmė tikrai nuo mūsų nepasislėps.

Suvokiame ir žinome:

kur funkcija, apibrėžta uždarame intervale, gali įgyti mažiausiąją ir didžiausiąją reikšmes;

jų ieškojimo žingsnius.

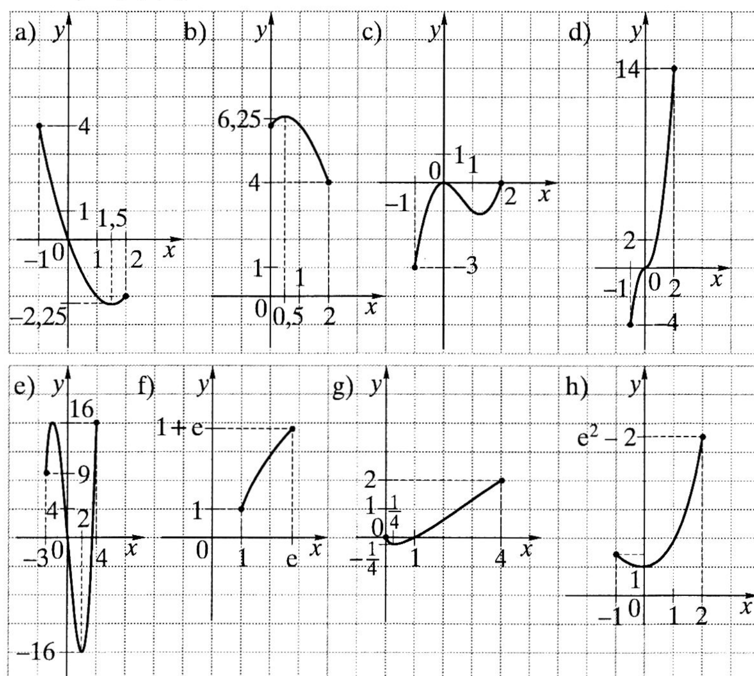
Mokame uždavinius apie dydžių didžiausias ir mažiausias reikšmes suvesti į funkcijos didžiausios ar mažiausios reikšmės uždarame intervale radimo uždavinį ir jį išspręsti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Sprendžiant uždavinius pagal vadovėlyje išnagrinėtus pavyzdžius, pakanka palyginti funkcijos reikšmes kritiniuose taškuose su reikšmėmis intervalo galuose. Tačiau, norint, kad moksleiviai pilnai suprastų sprendimo logiką, naudinga vieną kitą uždavinį išspręsti pilnai braižant funkcijos grafiką ir palyginant reikšmes. Ir tik tada pereiti prie sutrumpinto uždavinių sprendimo.

Išsprendus vieną kitą 127–129 užduočių pratimą, daugiau dėmesio vertėtų skirti 130–143 užduotims, kuriose funkcijos didžiausios ar mažiausios reikšmės radimo uždavinį reikia suformuluoti pagal užduoties sąlygą.

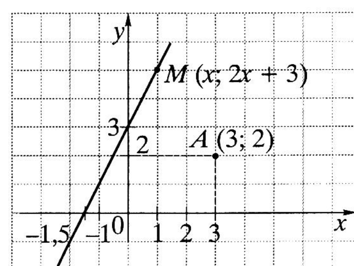
127. a) $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=4$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=-2{,}25$; b) $\max\limits_{[0;2]} f(x)=6{,}25$, $\min\limits_{[0;2]} f(x)=4$;
c) $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=0$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=-3$; d) $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=14$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=-4$;
e) $\max\limits_{[-3;4]} f(x)=16$, $\min\limits_{[-3;4]} f(x)=-16$; f) $\max\limits_{[1;e]} f(x)=1+e$, $\min\limits_{[1;e]} f(x)=1$;
g) $\max\limits_{[0;4]} f(x)=2$, $\min\limits_{[0;4]} f(x)=-\frac{1}{4}$; h) $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=e^2-2$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=1$.
Funkcijos $f(x)$ grafikas intervale:



128. a) $\min\limits_{[-1;8]} g(x)=-4$; b) $\min\limits_{[1;3]} g(x)=11$; c) $\min\limits_{[1;9]} g(x)=4$;
d) $\min\limits_{[4;9]} g(x)=9\sqrt{3}$; e) $\min\limits_{[\frac{1}{2};2]} g(x)=2(\ln 2-1)$; f) $\min\limits_{[0;\frac{\pi}{3}]} g(x)=0$.

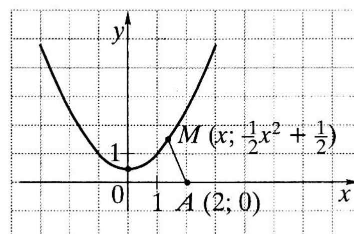
129. a) $\max\limits_{[1;9]} h(x)=63$; b) $\max\limits_{[1;6]} h(x)=4$; c) $\max\limits_{[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]} h(x)=3$;
d) $\max\limits_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} h(x)=\frac{\pi}{4}+1$.

130. a) Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = 2x + 3$ grafiko taško $M(x; 2x + 3)$ atstumą iki taško $A(3; 2)$:
$AM = \sqrt{(x-3)^2 + (2x+3-2)^2} = \sqrt{5x^2 - 2x + 10}$.
Pažymėję $AM = d(x)$, raskime šios funkcijos mažiausią reikšmę. Akivaizdu, kad pakanka nagrinėti argumento x reikšmes intervale $[-1; 3]$. (Galima pasirinkti ir kitą, pvz., dar didesnį intervalą.)
Randame funkcijos $d(x)$ kritinius taškus:
$d'(x) = \frac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x+10}}$; $d'(x) = 0$, kai $x = \frac{1}{5}$.
Kadangi $d(-1) = \sqrt{17}$, $d\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{7\sqrt{5}}{5}$, $d(3) = 7$, tai $\min\limits_{[-1;3]} d(x) = \frac{7\sqrt{5}}{5}$.

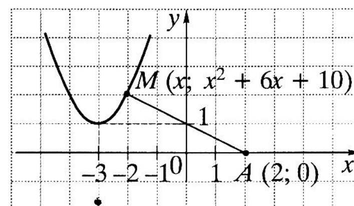


Pastabos. 1. Nesunku suprasti, kad galima buvo nagrinėti funkciją $d^2(x)$. Esant mažiausiam atstumo kvadratui ir pats atstumas bus mažiausias. Tuomet reikėtų nagrinėti paprastesnę funkciją.
2. Šiuo atveju galima spręsti ir be išvestinių.
Tiesės, statmenos duotajai, lygtis yra $y = -\frac{1}{2}x + b$. Kadangi ji eina per tašką $A(3; 2)$, tai $2 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$ ir $b = \frac{7}{2}$. Taigi tiesės lygtis yra $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$. Abiejų tiesių susikirtimo tašką galima rasti iš sistemos: $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$, $y = 3\frac{2}{5}$. Taigi tiesės kertasi taške, kurio koordinatės yra $\left(\frac{1}{5}; 3\frac{2}{5}\right)$. Liko apskaičiuoti atstumą.

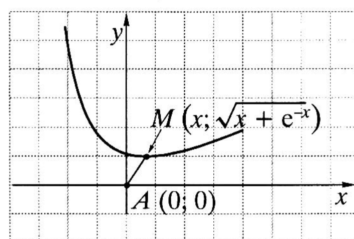
b) Raskime funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ grafiko taško $M\left(x; \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)$ atstumo iki taško $A(2; 0)$ kvadratą: $f(x) = AM^2 = (x-2)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)^2$.
Raskime funkcijos $f(x)$ kritinius taškus: $f'(x) = x^3 + 3x - 4$.
Nesunku pastebėti, kad $f'(x) = 0$, kai $x = 1$.
Galima pertvarkyti išvestinę ir grupuojant:
$f'(x) = x^3 - x^2 + x^2 - x + 4x - 4 = x^2(x-1) + x(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 4)$. Kvadratinis trinaris $x^2 + x + 4$ nuliu nevirsta, nes $D = 1 - 4 \cdot 4 < 0$. Taigi $x = 1$ — vienintelis kritinis taškas. Apsiribodami, pvz., intervalu $[0; 2]$, matome, kad $f(0) = 4\frac{1}{4}$, $f(1) = 2$, $f(2) = 6\frac{1}{4}$. Taigi $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 2$, o trumpiausias atstumas $AM = \sqrt{2}$.



c) *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Turi būti $A(2; 0)$.
Analogiškai kaip b) punkte, sudarome funkciją:
$f(x) = AM^2 = (x-2)^2 + (x^2 + 6x + 10)^2$, $x \in [-3; 2]$.
$f'(x) = 2(x-2) + 2(x^2+6x+10) \cdot (2x+6) = 2(2x^3 + 18x^2 + 57x + 58) = 2\big(2(x+2)x^2 + 14x^2 + 57x + 58\big) = 2\big(2(x+2)x^2 + 14(x+2)x + 29x + 58\big) = 2(x+2)(2x^2 + 14x + 29)$. Lygtis $2x^2 + 14x + 29 = 0$ sprendinių neturi, taigi $f'(x) = 0$, kai $x = -2$. Kadangi $f(-3) = 26$, $f(-2) = 20$, $f(2) = 26^2$, tai $\min\limits_{[-3;2]} f(x) = 20$. Tada mažiausias atstumas $AM = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.



d) Sudarome funkciją $f(x) = AM^2 = x^2 + x + e^{-x}$. Ją nagrinėsime visoje realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$. $f'(x) = 2x + 1 - e^{-x}$. Nesunku pastebėti, kad $f'(x) = 0$, kai $x = 0$. Lygtis $2x + 1 = e^{-x}$ kitų sprendinių negali turėti, nes $g_1(x) = 2x + 1$ yra didėjanti, o $g_2(x) = e^{-x}$ — mažėjanti funkcija. Intervale $(-\infty; 0)$ išvestinė $f'(x)$ yra neigiama, o intervale $(0; +\infty)$ — teigiama. Taigi $f(0) = 1$ — vienintelis funkcijos $f(x)$ minimumas, todėl mažiausias atstumas yra $AM = 1$.



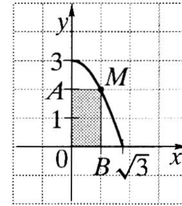
Pastaba. Pratimai c) ir d) yra pakankamai sunkūs, todėl juos patartume spręsti su stipresniais moksleiviais.

131. Ieškomus dėmenis pažymėkime x ir $10 - x$.
Nagrinėkime šių dėmenų kvadratų sumą:
$f(x) = x^2 + (10-x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$.
Reikia surasti mažiausią šios funkcijos reikšmę, kai $0 \leqslant x \leqslant 10$.
Raskime funkcijos $f(x)$ ekstremumo taškus, priklausančius intervalui $[0; 10]$:
$f'(x) = 4x - 20$; $4x - 20 = 0$, kai $x = 5$.
Skaičiuojame funkcijos reikšmes intervalo $[0; 10]$ galuose ir taške $x = 5$:
$f(0) = 100$, $f(10) = 100$, $f(5) = 50$. Taigi mažiausią reikšmę intervale $[0; 10]$ funkcija $f(x)$ įgyja, kai $x = 5$. Tada $y = 5$.
Atsakymas. $10 = 5 + 5$.

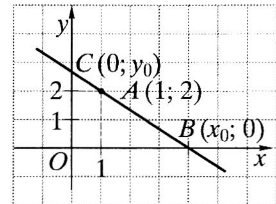
132. *Nurodymas.* Sprendimas analogiškas 131 uždavinio sprendimui. Jei vieną skaičių pažymėsime x, tai kitas skaičius bus $8 - x$. Lieka surasti funkcijos $f(x) = x^3 + (8-x)^3$ mažiausią reikšmę intervale $[0; 8]$.
Atsakymas. $8 = 4 + 4$.

133. *Nurodymas.* Vieną skaičių pažymėkite x. Tada kitas skaičius bus $\frac{36}{x}$. Raskite funkcijos $f(x) = x^2 + \left(\frac{36}{x}\right)^2$ mažiausią reikšmę intervale $[1; 36]$.
Atsakymas. $36 = 6 \cdot 6$.

134. Sakykime, kad parabolėje yra viršūnė M, Oy ašyje — viršūnė A, o Ox ašyje — viršūnė B. Tada viršūnės M koordinatės yra $(x; 3-x^2)$, viršūnės A koordinatės yra $(0; 3-x^2)$, o viršūnės B koordinatės yra $(x; 0)$. $S_{OAMB} = OA \cdot OB$, $OA = 3 - x^2$, $OB = x$, $S_{OAMB} = (3-x^2) \cdot x = 3x - x^3$. Reikia surasti didžiausią funkcijos $S(x) = 3x - x^3$ reikšmę, kai $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ (parabolės ir Ox ašies susikirtimo tašką rasime išsprendę lygtį $3 - x^2 = 0$).
$S'(x) = 3 - 3x^2$; $S'(x) = 0$, kai $3 - 3x^2 = 0$, $x^2 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Palyginame funkcijos $S(x)$ reikšmes taškuose $x = 0$, $x = 1$ ir $x = \sqrt{3}$ (reikšmė $x = -1$ nepatenka į intervalą $[0; \sqrt{3}]$). $S(0) = S(\sqrt{3}) = 0$, $S(1) = 2$. Taigi didžiausia funkcijos reikšmė intervale $[0; \sqrt{3}]$ lygi 2 — tai ir yra didžiausias galimas tokio stačiakampio plotas.

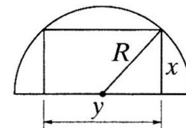


135. Per tašką $A(1; 2)$ nubrėžtos tiesės lygtis yra $y = k(x-1) + 2$. Kai $x = 0$, tai $y = -k + 2$, todėl taško C koordinatės $C(0; 2-k)$. Kai $y = 0$, tai $0 = k(x-1) + 2$ ir $x = 1 - \frac{2}{k}$, todėl taško B koordinatės $B\left(1 - \frac{2}{k}; 0\right)$.
a) Raskime atstumo tarp taškų B ir C kvadratą, kurį pažymėkime $f(k)$:
$f(k) = \left(1 - \frac{2}{k}\right)^2 + (2-k)^2$, $k \in (-\infty; 0)$ (nes $x_0 > 0$ ir $y_0 > 0$);
$f'(k) = 2\left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdot \frac{2}{k^2} - 2(2-k) = 2\left(\frac{2(k-2)}{k^3} + (k-2)\right) =$
$2(k-2)\left(\frac{2}{k^3} + 1\right) = \frac{2}{k^3}(k-2)(k^3+2)$.
Intervalui $(-\infty; 0]$ priklauso vienintelis kritinis taškas $k = -\sqrt[3]{2}$. Akivaizdu, kad tai minimumo taškas. Taigi ieškoma tiesė yra $y = -\sqrt[3]{2}(x-1) + 2$.
b) Trikampio OBC plotą pažymėkime $S(k)$. Tada
$S(k) = \frac{(2-k)\left(1-\frac{2}{k}\right)}{2} = 2 - \frac{2}{k} - \frac{k}{2}$, $k \in (-\infty; 0)$; $S'(k) = \frac{2}{k^2} - \frac{1}{2}$.
Nagrinėjamam intervalui priklauso funkcijos $S(k)$ kritinis taškas $k = -2$. Randame $S(-2) = 4$. Kadangi $S(k) \to +\infty$, kai $k \to -\infty$ ir $k \to 0$ $(k < 0)$, tai mažiausias ieškomo trikampio plotas lygus 4.
Pastaba. Šiame uždavinyje funkcija nagrinėjama atvirame intervale ir neįgyja didžiausių reikšmių.

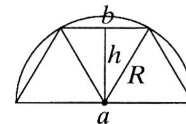


136. Reikia sulenkti kvadratą, kurio kraštinės ilgis yra 25 cm.
Pastaba. Stačiakampio plotą $S(x)$ aprašanti funkcija yra kvadratinė, todėl uždavinį galima lengvai išspręsti ir be išvestinių.

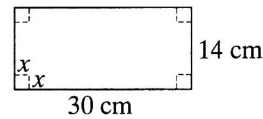
137. Tegu stačiakampio kraštinių ilgiai yra x ir y, o skritulio spindulys R. Tada $y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ (žr. brėžinį paraštėje), o stačiakampio plotas $S = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0; R]$.
Reikia surasti didžiausią šios funkcijos reikšmę, kai $0 \leqslant x \leqslant R$:
$S'(x) = (2x\sqrt{R^2-x^2})' = 2\left(x'\sqrt{R^2-x^2} + x \cdot (\sqrt{R^2-x^2})'\right) =$
$2\left(\sqrt{R^2-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}} \cdot (R^2-x^2)'\right) = 2\left(\sqrt{R^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\right) =$
$2 \cdot \frac{R^2-x^2-x^2}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2 \cdot \frac{R^2-2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$; $S'(x) = 0$, kai $R^2 - 2x^2 = 0$, $x_1 = -\frac{R\sqrt{2}}{2}$ ir $x_2 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Į intervalą $[0; R]$ patenka tik $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.
Palyginame funkcijos $S(x)$ reikšmes taškuose $x = 0$, $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ ir $x = R$: $S(0) = S(R) = 0$, $S\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = R^2$. Taigi didžiausias plotas to stačiakampio, kurio kraštinė $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, o kraštinė $y = R\sqrt{2}$, t. y. pusskritulio skersmenyje esanti kraštinė yra dvigubai ilgesnė už kitą stačiakampio kraštinę.



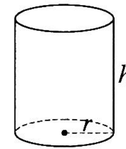
138. Tegu trapecijos pagrindai yra a ir b, o aukštinė h. Kadangi vienas trapecijos pagrindas yra pusskritulio skersmuo, tai $a = 2R$ (žr. brėžinį paraštėje).
Išreikškime trapecijos aukštinę h pagrindu b: $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2}$.
Tada trapecijos plotas $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2R+b}{2} \cdot \frac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2} = \frac{(2R+b)\sqrt{4R^2-b^2}}{4}$.
Dabar reikia surasti funkcijos $S(b) = \frac{(2R+b)\sqrt{4R^2-b^2}}{4}$ didžiausią reikšmę intervale $[0; 2R]$: $S'(b) = \frac{2R^2-Rb-b^2}{2\sqrt{4R^2-b^2}}$; $S'(b) = 0$, kai $2R^2 - Rb - b^2 = 0$, $b_1 = -2R$ (ši reikšmė nepriklauso intervalui $[0; 2R]$) ir $b_2 = R$;
$S(0) = S(2R) = 0$, $S(R) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Taigi didžiausias plotas tos trapecijos, kurios mažesniojo pagrindo ilgis lygus pusskritulio spindulio ilgiui. Tai bus į skritulį įbrėžto taisyklingojo šešiakampio pusė.



139. Dėžutės matmenys bus $(30-2x)$ cm, $(14-2x)$ cm ir x cm.
Tada jos tūris $V=(30-2x)(14-2x)x=420x-88x^2+4x^3$.
Suradę funkcijos $V(x)=420x-88x^2+4x^3$ didžiausią reikšmę intervale $0\leqslant x\leqslant 7$ nustatysime, kad dėžutės talpa bus didžiausia, kai iškirpsime kvadratus, kurių vieno kraštinės ilgis yra 3 cm.

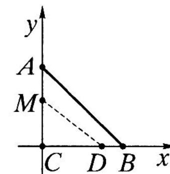


140. Sakykime, kad ritinio spindulys yra r, o aukštinė h.
Tada $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r(r+h)$ ir $h=\frac{S}{2\pi r}-r$.
Ritinio tūris $V(r)=\pi r^2h=\pi r^2\left(\frac{S}{2\pi r}-r\right)=\frac{Sr}{2}-\pi r^3$, $r\in\left[0;\sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right]$.
Raskime funkcijos $V(r)$ kritinius taškus: $V'(r)=\frac{S}{2}-3\pi r^2$;
$V'(r)=0$, kai $\frac{S}{2}-3\pi r^2=0$, $r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ — kritinis taškas.
Kadangi $V(0)=V\left(\sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)=0$,
$V\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)=\frac{S}{2}\cdot\sqrt{\frac{S}{6\pi}}-\pi\cdot\frac{S}{6\pi}\cdot\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=\frac{1}{3}\cdot S\cdot\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6\pi}{6\pi}\cdot S\cdot\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=2\pi\left(\frac{S}{6\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$,
tai taške $r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ funkcija įgyja didžiausią reikšmę, lygią $2\pi\left(\frac{S}{6\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$.
Įdomu pastebėti, kad tada
$$h=\frac{S}{2\pi r}-r=\frac{S}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}-\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=\sqrt{\frac{9S}{6\pi}}-\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=2r.$$
Taigi ritinio pagrindo skersmuo lygus aukštinei. Neatsitiktinai, taupant metalą, būtent tokių proporcijų daromos kai kurios konservų dėžutės.

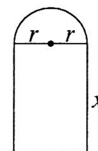


141. Tegu h — kūgio aukštinė, l — sudaromoji, o r — pagrindo spindulys. Tada $h=\sqrt{l^2-r^2}$, o kūgio tūris $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$, $r\in[0;l]$.
Ieškome funkcijos $V(r)$ didžiausios reikšmės intervale $[0;l]$:
$V'(r)=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{r(2l^2-3r^2)}{\sqrt{l^2-r^2}}$; $V'(r)=0$, kai $r=0$ ir $r=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot l$.
Kadangi $V(0)=V(l)=0$, o
$V\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot l\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{6}{9}\cdot l^2\cdot\sqrt{l^2-\frac{6}{9}\cdot l^2}=\frac{2\pi}{9}\cdot l^2\cdot\sqrt{\frac{l^2}{3}}=\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$, tai
$\max\limits_{[0;l]}V(r)=\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$.

142. Uždavinį patogu spręsti įvedus koordinačių sistemą. Iš sąlygos gauname: $AC=BC=240\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=120\sqrt{2}$. Po t valandų nuo išvažiavimo, motociklininkas bus taške $M(0;\,120\sqrt{2}-60t)$, o dviratininkas — taške $D(120\sqrt{2}-20t;\,0)$.
Tirsime atstumo tarp taškų M ir D kvadrato funkciją:
$f(t)=MD^2=(120\sqrt{2}-20t)^2+(120\sqrt{2}-60t)^2$, $t\in[0;+\infty)$;
$f'(t)=2(120\sqrt{2}-20t)\cdot(-20)+2(120\sqrt{2}-60t)\cdot(-60)=$
$8000t-19200\sqrt{2}=1600(5t-12\sqrt{2})$; $f'(t)=0$, kai $t=\frac{12\sqrt{2}}{5}$ — kritinis taškas;
$f(0)=240^2$, $f\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)=11\,520$, kai $t\to+\infty$, $f(t)\to+\infty$.
Funkcija $f(t)$ mažiausią reikšmę įgyja kritiniame taške
$t=\frac{12\sqrt{2}}{5}$ h $\approx 3{,}39$ h ≈ 3 h 24 min.
Tuo momentu taškų koordinatės bus: $M(0;\,-24\sqrt{2})$, $D(72\sqrt{2};\,0)$. Taigi motociklininkas bus jau gerokai pravažiavęs tašką C, o dviratininkas net nepravažiavęs pusiaukelės iki taško C.



143. Lango perimetras $P=\pi r+2r+2x$. Pagal sąlygą $8=\pi r+2r+2x$, iš čia $x=4-r-\frac{\pi}{2}r$. Tuomet angos plotas
$S(r)=\frac{\pi r^2}{2}+2r\cdot x=\frac{\pi r^2}{2}+2r(4-r-\frac{\pi}{2}r)=8r-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)r^2$, $r\in\left[0;\frac{8}{2+\pi}\right]$.
(Didžiausią r reikšmę gauname, kai $x=0$, t. y. iš lygties $4-r-\frac{\pi}{2}r=0$.)
$S'(r)=8-2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\cdot r=8-(4+\pi)r$. Kritinis taškas $r=\frac{8}{4+\pi}$; $S(0)=0$,
$S\left(\frac{8}{2+\pi}\right)=\frac{32\pi}{(2+\pi)^2}\approx 3{,}8\,(\text{m}^2)$, $S\left(\frac{8}{4+\pi}\right)=\frac{32}{4+\pi}\approx 4{,}5(\text{m}^2)$.
Atsakymas. Esant skritulio spinduliui $r=\frac{8}{4+\pi}\approx 1{,}1$ m, lango anga bus didžiausia ir apytiksliai lygi $4{,}5\ \text{m}^2$.



7. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

Pastaba. Vadovėlyje pateikti neteisingi atsakymai šių uždavinių: 37, 44a, 47a, 52, 62.

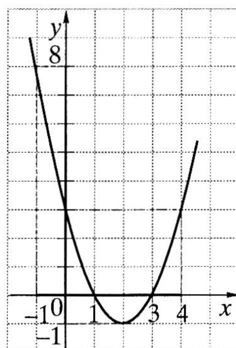
1. a) Kadangi kvadratinė šaknis apibrėžta tik neneigiamiems skaičiams ir trupmenos vardiklis negali būti lygus nuliui, tai funkcijos $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ apibrėžimo sritis yra x reikšmės, tenkinančios nelygybių sistemą:
$\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \leqslant x < 3$ ir $x > 3$.

b) Funkcijos $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$ apibrėžimo sritis yra x reikšmės, tenkinančios nelygybę $x^2 - 8x + 15 \geqslant 0 \Rightarrow (x-3)(x-5) \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3$ ir $x \geqslant 5$.

c) Kadangi su visais realiaisiais x reiškiniai $x^2 + 1 > 0$ ir $x^2 + x + 1 > 0$, tai funkcijos $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+x+1}$ apibrėžimo sritis — visa realiųjų skaičių aibė.

d) Funkcijos $f(x) = \sqrt{x(x+1)(x+2)}$ apibrėžimo sritis yra x reikšmės, tenkinančios nelygybę $x(x+1)(x+2) \geqslant 0 \Rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 1$ ir $x \geqslant 0$.

2. *I būdas.* Reikšmių intervalą nustatome nubraižę parabolę $y = x^2 - 4x + 3$ ir brėžinyje pažymėję argumento intervalą, pagal jį nustatome reikšmių intervalą. Pateikiame punkto d) brėžinį.



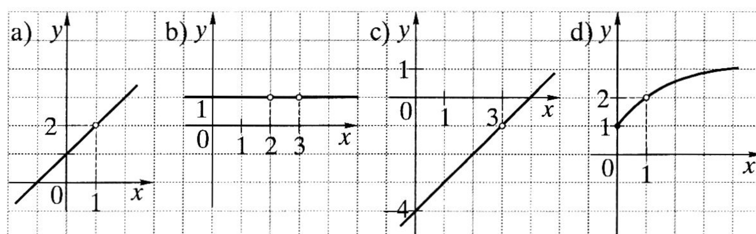
II būdas. Randame funkcijos $f(x) = x^2 - 4x + 3$ didžiausią ir mažiausią reikšmes nurodytame intervale.
Atsakymas. a) [0; 3]; b) [−1; 0]; c) [−1; 3]; d) [−1; 8].

3. a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 3x + 1) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 - \lim\limits_{x\to 3}(3x) + \lim\limits_{x\to 3} 1 = 3^2 - 9 + 1 = 1$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2x}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x-1} = 2$;

c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+2}}{\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+2}+1} = \frac{1}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{x}-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}-1)} = 1$.

4. *Nurodymas.* Pastebėkite, kad:
a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$, kai $x \neq 1$;
b) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-3)(x-2)} = 1$, kai $x \neq 2$ ir $x \neq 3$;
c) $f(x) = \frac{x^2-7x+12}{x-3} = x - 4$, kai $x \neq 3$;
d) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1$, kai $0 \leqslant x < 1$ ir $x > 1$.
Funkcijos $f(x)$ grafikas:



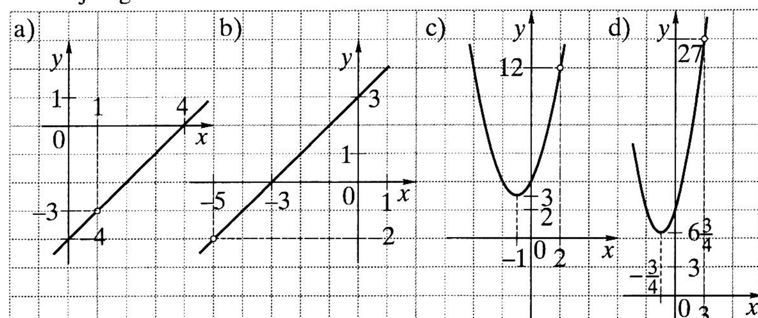
5. a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-4) = -3$;

b) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2+8x+15}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5} \frac{(x+5)(x+3)}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5}(x+3) = -2$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+9)=27$.

Funkcijos grafikas:

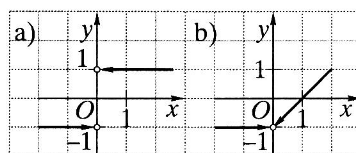


6. *Nurodymas.* Pertvarkykite reiškinį taip, kad šaknis atsidurtų vardiklyje.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$;

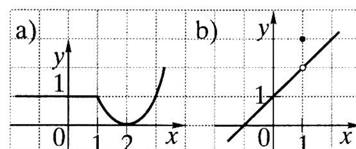
b) $\frac{1}{8}$; c) $-\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{4}$.

7. a) Riba $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ neegzistuoja, nes pereidama per tašką O funkcija $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{kai } x<0,\\ 1, & \text{kai } x>0\end{cases}$ daro „šuolį“ aukštyn per 2 vienetus, ir jos grafikas nutrūksta. Artėjant prie 0 iš kairės, funkcijos riba lygi -1, o artėjant iš dešinės — lygi 1.



b) Riba $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ egzistuoja, nes artėjant tiek iš kairės, tiek iš dešinės, funkcijos $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{kai } x<0,\\ x-1, & \text{kai } x>0\end{cases}$ riba lygi -1.

8. a) Taške $x=1$ funkcija $f(x)=\begin{cases}1, & \text{kai } x\leqslant 1,\\ x^2-4x+4, & \text{kai } x>1\end{cases}$ yra tolydi, nes $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$.

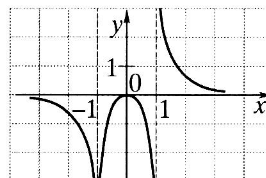


b) Taške $x=1$ funkcija $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & \text{kai } x\neq 1,\\ 3, & \text{kai } x=1\end{cases}$ nėra tolydi, nes $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ neegzistuoja.

9. Nubraižę grafiką matome, kad funkcija $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ trūki taškuose $x=-1$ ir $x=1$. (Žinoma, trūkio taškus galime nustatyti ir nebraižydami grafiko.)

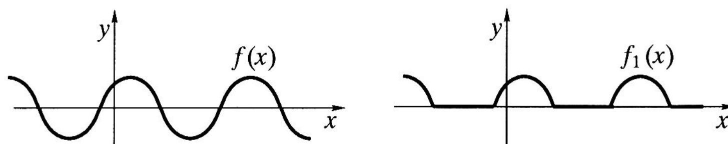
a) Intervale $(0;3)$ funkcija $f(x)$ yra trūki.

Intervale: b) $(-5;-3)$; c) $(-2;-1)$; d) $(-1;1)$ funkcija $f(x)$ yra tolydi.



10. a) Tolydi.

Funkcijos $f_1(x)$ grafikas sutampa su funkcijos $f(x)$ grafiku ten, kur $f(x)\geqslant 0$. Ten kur $f(x)<0$, $f_1(x)=0$. Pavyzdžiui:



b) Tolydi.

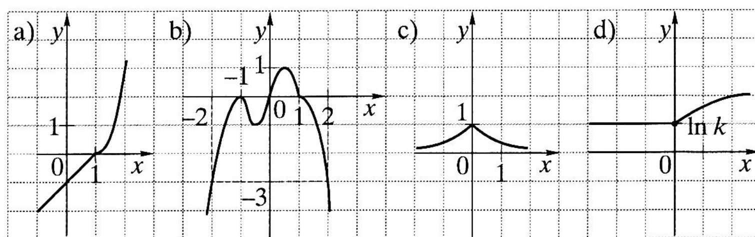
11. Pavyzdžiui: $f_1(x)=\begin{cases}1, & \text{kai } x\in[0;1),\\ 2, & \text{kai } x\in[1;2];\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{1-x}}, & \text{kai } x\neq 1,\\ 1, & \text{kai } x=1;\end{cases}$ $f_3(x)=[\frac{x-1}{2}]$.

12. a) Kai $x\to 1$ $(x>1)$, tai $f(x)\to 0$. Kai $x\to 1$ $(x<1)$, tai $f(x)\to 1+k$. Funkcija bus tolydi, kai $1+k=0$. Vadinasi, $k=-1$.

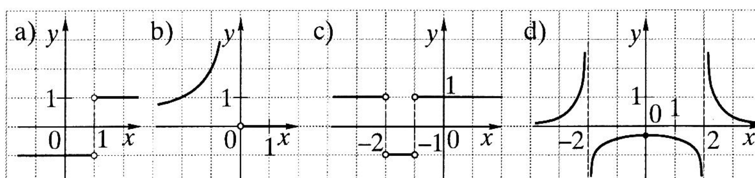
b) Kai $x\to 1$ $(x<1)$, tai $\sin\pi x\to 0$. Kai $x\to 1$ $(x>1)$, tai $k-x^2\to k-1$. Iš lygties $k-1=0$ gauname, kad $k=1$. Panašiai įsitikiname, kad tada funkcija tolydi ir taške $x=-1$.

c) Iš lygties $k=-k$ gauname, kad $k=0$.

d) Iš lygties $\ln k=\ln k$ matome, kad lygybė teisinga su visais $k>0$.



13. a) $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}=\begin{cases}1, & \text{kai } x>1,\\ -1, & \text{kai } x<1.\end{cases}$
Trūkis taške $x=1$. Jame funkcija neapibrėžta.
b) $f(x)=\frac{|x|-x}{x^2}=\begin{cases}0, & \text{kai } x>0,\\ -\frac{2}{x}, & \text{kai } x<0.\end{cases}$ Funkcija trūki taške $x=0$.
c) $f(x)=\frac{|x^2+3x+2|}{x^2+3x+2}=\begin{cases}1, & \text{kai } x\in(-\infty;-2),\\ -1, & \text{kai } x\in(-2;-1),\\ 1, & \text{kai } x\in(-1;+\infty).\end{cases}$
Taškuose $x=-2$ ir $x=-1$ funkcija trūki.
d) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}$. Matome, kad funkcija neapibrėžta taškuose $x=-2$ ir $x=2$. Juose funkcija trūki.
Funkcijos $f(x)$ grafikas:



14. a) $2x^2-x+(4x-1)\cdot\Delta x+2\cdot(\Delta x)^2$; b) $3x^2+2x+2\cdot\Delta x\cdot(3x+1)+3\cdot(\Delta x)^2$.

15. *Nurodymas.* $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.
Atsakymas. a) 0,03; b) −2,32; c) 0,52; d) 1,671.

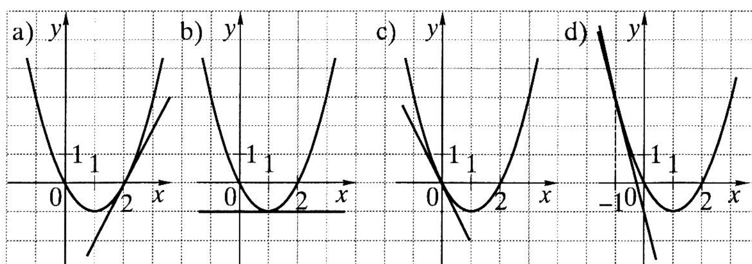
16. a) $y(1)=1+1^2=2$, $y(3)=1+3^2=10$. Taigi laikotarpiu nuo $t=1$ iki $t=3$, taško padėtis, t. y. y padidėjo nuo 2 iki 10.
b) $\Delta y(3)=y(3+0{,}01)-y(3)=0{,}0601$.

17. *Nurodymas.* $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.
a) $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{8\cdot\Delta x-1+1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{8\cdot\Delta x}{\Delta x}=8$;
b) 5; c) −1; d) $\frac{1}{2}$.

18. a) $p'(x)=6x$; b) $p'(x)=12x^2-4x$; c) $p'(x)=10x-10x^9$;
d) $p'(x)=x^4+x^3+x^2$; e) $p'(x)=5x^4+8x$; f) $p'(x)=24x^7-6x^5$.

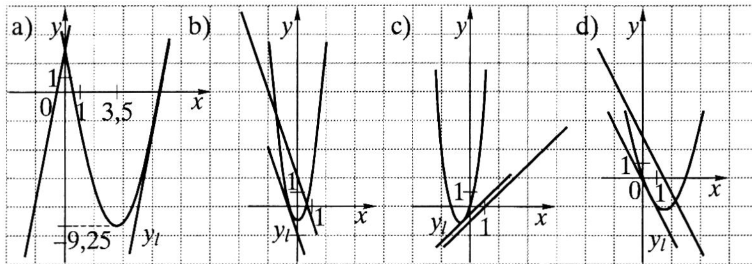
19. Pavyzdžiui: $f_1(x)=|(x-1)(x-2)|$, $f_2(x)=\big||x-1{,}5|-0{,}5)\big|$,
$f_3(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & \text{kai } x\in[1;2],\\ 0, & \text{kai } x\notin[1;2].\end{cases}$

20. a) $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ — liestinės lygtis; $f(x_0)=f(2)=0$, $f'(x)=2x-2$, $f'(2)=2$. Funkcijos $y=x(x-2)$ grafiko liestinės taške $x_0=2$ lygtis $y=2(x-2)+0$, $y=2x-4$.
b) $y=-1$; c) $y=-2x$; d) $y=-4x-1$.
Funkcijos $y=x(x-2)$ grafikas ir jo liestinė:

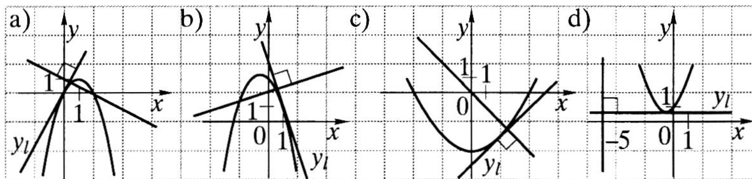


21. a) $\operatorname{tg}\varphi_0=f'(x_0)=f'(1)=1$, $\varphi_0=\operatorname{arctg}1=45°$;
b) 135°; c) 0°; d) 135°.

22. a) Tiesės $y = 5x + 2$ krypties koeficientas $k = 5$.
Kad funkcijos $f(x) = x^2 - 7x + 3$ grafiko liestinė būtų lygiagreti tiesei $y = 5x + 2$, tai liestinės krypties koeficientas $f'(x_0)$ turi būti lygus 5:
$f'(x_0) = 2x_0 - 7$, $2x_0 - 7 = 5$, $x_0 = 6$; $y_0 = f(x_0) = f(6) = -3$.
Taigi per tašką $(6; -3)$ nubrėžta funkcijos $f(x)$ grafiko liestinė yra lygiagreti tiesei $y = 5x + 2$.
b) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$; c) $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$; d) $\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{4}\right)$.
Nubraižykime brėžinį:



23. a) Funkcijos $g(x) = 2x - x^2$ grafiko liestinė bus statmena tiesei $y = -\frac{1}{2}x + 1$, kai šios tiesės krypties koeficiento ir liestinės krypties koeficiento sandauga bus lygi -1, t. y. $-\frac{1}{2} \cdot g'(x_0) = -1$, $g'(x_0) = 2$.
Randame $g'(x_0)$ remdamiesi apibrėžimu: $g'(x_0) = 2 - 2x_0$.
Tada $2 - 2x_0 = 2$ ir $x_0 = 0$; $y_0 = g(x_0) = g(0) = 0$.
Taigi per tašką $(0; 0)$ nubrėžta funkcijos $g(x)$ grafiko liestinė yra statmena tiesei $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $(1; 1)$; c) $(2; -3)$; d) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.
Nubraižykime brėžinį:



24. Užrašykime funkcijos $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ grafiko liestinės taške x_0 lygtį:
$f'(x_0) = 4x_0 - 5$, $f(x_0) = 2x_0^2 - 5x_0 + 1$;
$y = (4x_0 - 5)(x - x_0) + 2x_0^2 - 5x_0 + 1$, $y = x(4x_0 - 5) - 2x_0^2 + 1$ — liestinės lygtis.
Dabar uždavinio klausimą galėtume suformuluoti taip: su kuria a reikšme, tiesės $y = 3x + a$ ir $y = x(4x_0 - 5) - 2x_0^2 + 1$ sutampa? Prisiminkime, kad tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ sutampa, jei $k_1 = k_2$ ir $b_1 = b_2$. Sulyginkime tiesių $y = 3x + a$ ir $y = x(4x_0 - 5) - 2x_0^2 + 1$ krypčių koeficientus: $3 = 4x_0 - 5$, $x_0 = 2$; ir laisvuosius narius: $a = -2x_0^2 + 1$. Į šią lygybę įstatykime $x_0 = 2$: $a = -2 \cdot 2^2 + 1 = -7$. Taigi kai $a = -7$, tiesė $y = 3x + a$ yra funkcijos $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ grafiko liestinė.

25. *Nurodymas.* Sprendimas analogiškas 24 uždavinio sprendimui.
Atsakymas. $a_1 = -2$, $a_2 = -6$.

26. a) $f'(x) = \left(x^7(x^2 - 1)\right)' = (x^9 - x^7)' = 9x^8 - 7x^6 = x^6(9x^2 - 7)$;
$\left(\text{arba: } f'(x) = (x^7(x^2 - 1))' = (x^7)'(x^2 - 1) + x^7(x^2 - 1)' = 7x^6(x^2 - 1) + 2x^8 = x^6(9x^2 - 7)\right)$;
b) $f'(x) = \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (x^{-2})' + \frac{1}{3} \cdot (x^{-3})' + \left(\frac{1}{4}\right)' = -x^{-3} - x^{-4} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$;
c) $f'(x) = \left(x^3(2\sqrt{x} + 1)\right)' = (x^3)'(2\sqrt{x} + 1) + x^3 \cdot (2\sqrt{x} + 1)' = 3x^2(2\sqrt{x} + 1) + x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 3x^2(2\sqrt{x} + 1) + x^2\sqrt{x} = x^2(7\sqrt{x} + 3)$;
d) $f'(x) = \left(x^{\sqrt{2}} - x^{-\sqrt{2}}\right)' = \left(x^{\sqrt{2}}\right)' - \left(x^{-\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} + \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}\left(x^{\sqrt{2}-1} + x^{-\sqrt{2}-1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{x}\left(x^{\sqrt{2}} + x^{-\sqrt{2}}\right)$;
e) $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2}\right)' = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' + \left(\sqrt[3]{2}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;
f) $f'(x) = \left(x^3 \cdot \sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{3+\frac{1}{3}}\right)' = \frac{10}{3}x^{\frac{7}{3}} = \frac{10}{3}x^2\sqrt[3]{x}$.

27. a) $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$, $f'\big(\frac{\pi}{2}\big) = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \big(\frac{\pi}{2}\big)^2\cos\frac{\pi}{2} = \pi$;
b) $f'(x) = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$, $f'(\pi) = \pi$;
c) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$;
d) $f'(x) = \frac{2\cos x+1}{(\cos x+2)^2}$, $f'(\pi) = -1$.

28. $f'(x) = \big(3x - \frac{1}{x^2}\big)' = 3 + \frac{2}{x^3}$. Sprendžiame lygtį: $3 + \frac{2}{x^3} = 5 \Rightarrow x = 1$.

29. $f'(x) = \big(\frac{-x-9}{6x-18}\big)' = \frac{72}{(6x-18)^2} = \frac{2}{(x-3)^2}$, $f(0) = \frac{1}{2}$.
Sprendžiame lygtį: $\frac{2}{(x-3)^2} = \frac{1}{2x} \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 9$.

30. $s(t) = \sqrt[3]{t^2} = t^{\frac{2}{3}}$, $v(t) = s'(t) = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}$,
$a(t) = v'(t) = \frac{2}{3}\cdot\big(-\frac{1}{3}\big)t^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\big(t^{\frac{2}{3}}\big)^2} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\big(s(t)\big)^2}$.

31. $f'(x) = \big(\frac{\ln x}{x^2}\big)' = \frac{(\ln x)'\cdot x^2 - \ln x\cdot(x^2)'}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$;
$f'(1) = 1$, $f'(\mathrm{e}) = -\frac{1}{\mathrm{e}^3}$, $f'\big(\frac{1}{\mathrm{e}}\big) = 3\mathrm{e}^3$. Taigi $f'(\mathrm{e}) < f'(1) < f'\big(\frac{1}{\mathrm{e}}\big)$.

32. a) $f(g(x)) = 2g(x) - 3 = 2x^2 - 3$, $g(f(x)) = (2x-3)^2$;
b) $f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$, $x \geqslant 0$, $g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$;
c) $f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
d) $f(g(x)) = \frac{1}{1-g(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} = 1 + \frac{1}{x}$, $g(f(x)) = \frac{1}{1+f(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{2-x}$.
Lygybė $f(g(x)) = g(f(x))$ teisinga tik c) atveju.

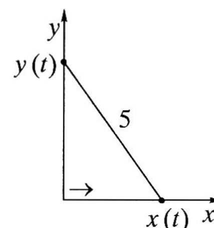
33. a) $g'(x) = (\cos^3 x)' = 3\cos^2 x\cdot(\cos x)' = -3\sin x\cos^2 x$;
b) $g'(x) = (\operatorname{tg} 3x)' = \frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)' = \frac{3}{\cos^2 3x}$;
c) $g'(x) = (\sin^2 3x)' = 2\sin 3x\cdot(\sin 3x)' = 2\sin 3x\cos 3x\cdot(3x)' = 3\sin 6x$;
d) $g'(x) = (\ln^2 x)' = 2\ln x\cdot(\ln x)' = \frac{2\ln x}{x}$;
e) $g'(x) = (x^2\mathrm{e}^{2x})' = (x^2)'\cdot\mathrm{e}^{2x} + x^2\cdot(\mathrm{e}^{2x})' = 2x\mathrm{e}^{2x} + x^2\cdot\mathrm{e}^{2x}\cdot(2x)' = 2x\mathrm{e}^{2x}(1+x)$;
f) $g'(x) = (\log_3^3 x)' = 3\log_3^2 x\cdot(\log_3 x)' = \frac{3\log_3^2 x}{x\ln 3} = \frac{3\ln^2 x}{x\ln^3 3}$
(arba: $g'(x) = (\log_3^3 x)' = \big(\frac{\ln^3 x}{\ln^3 3}\big)' = \frac{1}{\ln^3 3}\cdot 3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x} = \frac{3\ln^2 x}{x\ln^3 3}$).

34. a) $f'(x) = (3^{3x})' = 3^{3x}\ln 3\cdot(3x)' = 3\cdot 3^{3x}\ln 3$; $f'(1) = 3^4\ln 3$;
b) $f'(x) = \big(\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x+1}\big)' = \frac{(\mathrm{e}^{3x}-1)'\cdot(x+1) - (\mathrm{e}^{3x}-1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{3x}\cdot(3x+2)+1}{(x+1)^2}$; $f'(0) = 3$;
c) $f'(x) = (\sin 2x\cdot\mathrm{e}^{3x})' = (\sin 2x)'\cdot\mathrm{e}^{3x} + \sin 2x\cdot(\mathrm{e}^{3x})' = \cos 2x\cdot(2x)'\cdot\mathrm{e}^{3x} + \sin 2x\cdot\mathrm{e}^{3x}\cdot(3x)' = \mathrm{e}^{3x}(2\cos 2x + 3\sin 2x)$; $f'(0) = 2$;
d) $f'(x) = (x^3\cdot\ln x)' = (x^3)'\cdot\ln x + x^3\cdot(\ln x)' = 3x^2\ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$; $f'(1) = 1$.

35. $f'(x) = (x + \sqrt{1+x^2})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+x^2)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
$(x^2+1)f'(x) = (x^2+1)\big(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\big) = x^2 + 1 + x\sqrt{1+x^2} = 1 + x(x + \sqrt{1+x^2}) = 1 + xf(x)$.

36. a) Kūnai susitiks du kartus: kai $t_1 = 1$ ir $t_2 = 3$. (*Nurodymas*. Sprendžiame lygtį $4t^2 + 2 = 3t^2 + 4t - 1$.)
b) $v_1(t) = x_1'(t) = 8t$, $v_2(t) = x_2(t) = 6t + 4$; $v_1(1) = 8$, $v_2(1) = 10$; $v_1(3) = 24$, $v_2(3) = 22$.

37. Apatinis kopėčių galas juda 2 m/s greičiu. Taigi $x'(t) = 2$, todėl kopėčių apatinio galo padėtį nusako funkcija $x(t) = 2t$ (jei $x(0) = 0$). Pagal Pitagoro teoremą $y(t) = \sqrt{5^2 - 4t^2}$. Todėl viršutinio galo greitis $v(t) = y'(t) = \frac{-4t}{\sqrt{25-4t^2}}$.
Kadangi $y'(t) < 0$, tai rodo, kad kopėčių galas leidžiasi.
Pastaba. Sąlygą reikia suprasti taip, kad $x(0) = 0$. Tačiau ir laikant, kad $x(t) = 2t + x_0$ (kad kopėčios atremtos buvo nuo sienos toliau (kai $x_0 \neq 0$)), gautume $v(t) = \frac{-2(2t+x_0)}{\sqrt{5^2-(2t+x_0)^2}} = \frac{-2x(t)}{5^2-(x(t))^2}$.
Taigi viršutinio galo leidimosi greitį apsprendžia apatinio galo padėtis, nepriklausomai nuo pradinės padėties.



38. Laikykime, kad baliono pradinis spindulys $R(0) = 0$. Tuomet per t sekundžių jo tūris bus $\frac{9t}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3$. Tada $R(t) = \sqrt[3]{\frac{27t}{8\pi}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{\pi}} \cdot \sqrt[3]{t}$.

a) $R(27) = \frac{3\cdot 3}{2\sqrt[3]{\pi}} = \frac{9}{2\sqrt[3]{\pi}} \approx 3{,}07\,(\text{dm})$.

b) $v(t) = R'(t) = \left(\frac{3}{2\sqrt[3]{\pi}} \cdot \sqrt[3]{t}\right)' = \frac{3}{2\sqrt[3]{\pi}} \cdot (\sqrt[3]{t})' = \frac{1}{2\sqrt[3]{\pi t^2}}$;

$v(27) = \frac{1}{2\sqrt[3]{\pi \cdot 27^2}} = \frac{1}{18\sqrt[3]{\pi}} \approx 0{,}04\,(\text{dm/s})$.

39. a) Funkcija $f(x) = x^3 + x$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Kadangi $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ su visais x, tai funkcija $f(x)$ yra didėjanti visoje apibrėžimo srityje.

b) Funkcijos $f(x) = \sqrt{x} + e^x$ apibrėžimo sritis — intervalas $[0; +\infty)$. Kadangi $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x > 0$ su visais x iš apibrėžimo srities, tai funkcija $f(x)$ yra didėjanti.

c) Funkcijos $f(x) = x + \sqrt{1+x}$ apibrėžimo sritis — intervalas $[-1; +\infty)$. Kadangi $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$ su visais $x \in (-1; +\infty)$, tai funkcija $f(x)$ yra didėjanti visoje D_f.

d) Funkcija $f(x) = 5x - 2\cos 2x$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Kadangi $f'(x) = 5 + 4\sin 2x > 0$, nes $|\sin 2x| \leqslant 1$.

40. a) Funkcija $f(x)$ yra didėjanti visoje realiųjų skaičių aibėje, t. y. intervale $(-\infty; +\infty)$.

b) Intervale $(1; +\infty)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervale $(-\infty; 1)$ — mažėjanti.

c) Intervale $(4; +\infty)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervale $(-\infty; 4)$ — mažėjanti.

d) Intervaluose $(-\infty; -2)$ ir $(2; +\infty)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervale $(-2; 2)$ — mažėjanti.

e) Intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; +\infty)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervale $(0; 2)$ — mažėjanti.

f) Intervaluose $(-2; 0)$ ir $(2; +\infty)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervaluose $(-\infty; -2)$ ir $(0; 2)$ — mažėjanti.

41. a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Kadangi $(1+x^2)^2 > 0$ su visais x, tai $f'(x) > 0$, kai $1 - x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$;
$f'(x) < 0$, kai $1 - x^2 < 0 \Rightarrow x < -1$ ir $x > 1$.

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Kadangi $(1+x^2)^2 > 0$ su visais x, tai $f'(x) > 0$, kai $-2x > 0 \Rightarrow x < 0$; $f'(x) < 0$, kai $-2x < 0 \Rightarrow x > 0$.

c) $f(x) = xe^{-3x}$, $f'(x) = e^{-3x}(1 - 3x)$. Kadangi $e^{-3x} > 0$ su visais x, tai $f'(x) > 0$, kai $1 - 3x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$; $f'(x) < 0$, kai $1 - 3x < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$.

d) $f(x) = x^2 \ln x$, $f'(x) = x(2\ln x + 1)$. Kadangi $x > 0$ ($D_f = (0; +\infty)$), tai $f'(x) > 0$, kai $2\ln x + 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$;
$f'(x) < 0$, kai $2\ln x + 1 < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Atsakymas. a) Intervale $(-1; 1)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$ — mažėjanti; b) intervale $(-\infty; 0)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervale $(0; +\infty)$ — mažėjanti; c) intervale $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervale $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ — mažėjanti; d) intervale $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ funkcija $f(x)$ yra didėjanti, o intervale $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ — mažėjanti.

42. a) Raskime funkcijos $g(x) = ax^2 - \ln x$ išvestinę: $g'(x) = 2ax - \frac{1}{x}$.
Nustatykime x, su kuriais $g'(x) < 0$:
$2ax - \frac{1}{x} < 0$ arba $a < \frac{1}{2x^2}$ $(x > 0)$. Kadangi $x \in I = (0; 5)$, tai reiškinys $\frac{1}{2x^2}$ įgyja reikšmes intervale $(\frac{1}{50}; +\infty)$. Tam, kad nelygybė $a < \frac{1}{2x^2}$ būtų teisinga su visais $x \in (0; 5)$, turi būti $a \leqslant \frac{1}{50}$.

b) Sprendimas analogiškas a) punktui. *Atsakymas.* $a \geqslant \frac{1}{8}$.

43. *Nurodymas.* Pateiktuose pratimuose visos funkcijos yra diferencijuojamos visoje $\boldsymbol{R}$. Taigi kritiniai taškai randami iš sąlygos $h'(x) = 0$.
Atsakymas. a) $x = \frac{1}{5}$; b) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; c) kritinių taškų nėra;
d) $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

44. a) Taške $x = 0$ funkcija $f(x) = x^3 - 3x^2$ įgyja maksimumą $f(0) = 0$, o taške $x = 2$ — minimumą $f(2) = -4$;

b) taške $x = -1$ funkcija $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x$ įgyja maksimumą $f(-1) = 10$, o taške $x = 3$ — minimumą $f(3) = -54$;

c) taškuose $x = -2$ ir $x = 2$ funkcija $f(x) = 2x^4 - 16x^2$ įgyja minimumus $f(-2) = f(2) = -32$, o taške $x = 0$ — maksimumą $f(0) = 0$;

d) ekstremumų nėra.

45. a) Funkcija $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ apibrėžta su visais x, išskyrus $x = 0$.
Randame $f'(x)$: $f'(x) = \left(x^3 + \frac{3}{x}\right)' = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x^2}(x^4 - 1)$.
$f'(x) = 0$, kai $x = -1$ ir $x = 1$.
Sudarykime lentelę:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	—	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\nearrow$	-4, max	$\searrow$	—	$\searrow$	4, min	$\nearrow$

Taigi taške $x = -1$ funkcija $f(x)$ įgyja maksimumą $f(-1) = -4$, o taške $x = 1$ — minimumą $f(1) = 4$.

b) Funkcija $f(x) = \sin x - x$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Randame funkcijos $f(x)$ išvestinę: $f'(x) = \cos x - 1$. Matome, kad $f'(x) = 0$, kai $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$, o kituose taškuose $f'(x) < 0$. Taigi kai x pereina kritinius taškus $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, funkcijos išvestinės reikšmės nekeičia ženklo. Funkcija yra mažėjanti ir ekstremumų neturi.

c) Funkcijos $f(x) = 2\ln x - x^2$ apibrėžimo sritis — intervalas $(0; +\infty)$. Randame $f'(x)$: $f'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2}{x}(x^2 - 1)$; $f'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$. Kadangi $x_1 = -1 \notin D_f$, tai lieka tik vienas kritinis taškas $x = 1$.
Sudarykime lentelę:

x	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$
$f(x)$	$\nearrow$	-1, max	$\searrow$

Taigi taške $x = 1$ funkcija $f(x)$ įgyja maksimumą $f(1) = -1$.
Pastaba. Išsprendus šį pratimą galima mokinių paklausti, kuo nuo šios funkcijos skirtųsi funkcijos $f_1(x) = \ln x^2 - x^2$ ekstremumai ir grafikas. Funkcija $f_1(x)$ apibrėžta $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, lyginė, turi du maksimumus: $f_1(-1) = f_1(1) = -1$.

d) Funkcijos $f(x) = \frac{1}{x}e^x$ apibrėžimo sritis — visa realiųjų skaičių aibė, išskyrus $x = 0$. $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$; $f'(x) = 0$, kai $x = 1$ ($e^x > 0$ su visais x).
Sudarykime lentelę:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	–	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\searrow$	–	$\searrow$	e, min	$\nearrow$

Taigi taške $x = 1$ funkcija $f(x)$ įgyja minimumą $f(1) = e$.

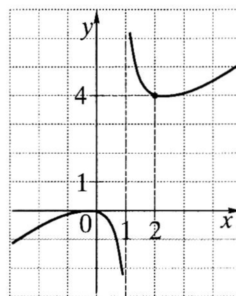
46. Raskime funkcijos $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ išvestinę:
$f'(x) = (4^x - 2^{x+1})' = (4^x - 2 \cdot 2^x)' = (4^x)' - 2 \cdot (2^x)' =$
$4^x \ln 4 - 2 \cdot 2^x \ln 2 = 2^{2x} \cdot 2\ln 2 - 2 \cdot 2^x \ln 2 = 2^{x+1} \ln 2 \cdot (2^x - 1)$;
$f'(x) = 0$, kai $2^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$.
Kadangi $2^{x+1} \ln 2 > 0$ su visais x, tai $f'(x) > 0$, kai $x > 0$ ir $f'(x) < 0$, kai $x < 0$. Taigi taškas $x = 0$ yra funkcijos $f(x)$ minimumo taškas.
Randame $f'(0)$: $f'(0) = 2^1 \cdot \ln 2 \cdot (2^0 - 1) = 0$.
Randame $f(0)$: $f(0) = 4^0 - 2^1 = -1$.
Tada funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės lygtis $y = -1$.

47. a) $g'(x) = 2x - 8 = 2(x - 4)$. Funkcijos $g(x)$ grafikas — kvadratinė parabolė, kurios viršūnė yra taške $(4; -4)$. Parabolės šakos nukreiptos aukštyn, todėl $E(g) = [-4; +\infty)$.

b) $g'(x) = 4x^3 + 32 = 4(x^3 + 8)$. Kritinis taškas $x = -2$.
Intervale $(-\infty; -2)$ funkcija yra mažėjanti, o intervale $(-2; +\infty)$ — didėjanti. Taigi $g(-2) = -48$ (minimumas). Funkcija apibrėžta visoje aibėje $\boldsymbol{R}$, kitų ekstremumų neturi. Todėl $E(g) = [-48; +\infty)$.

c) $D_g = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $g'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
Kritiniai taškai $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.
Sudarykime lentelę:

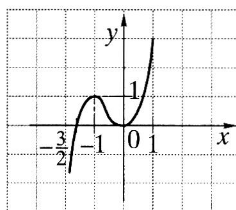
x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$g(x)$	↗	0, max	↘	−	↘	4, min	↗



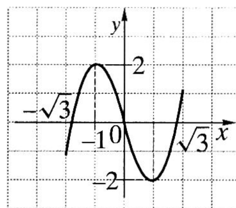
Pravartu nusibraižyti nors ir labai schematišką funkcijos grafiką (žr. paraštėje).
Situacija iš pirmo žvilgsnio paradoksali: funkcijos minimumas didesnis už maksimumą. Tačiau tarp šių ekstremumų taške $x = 1$ funkcija neapibrėžta. Kai $x \to 1$ $(x > 1)$, tai $f(x) \to +\infty$; kai $x \to 1$ $(x < 1)$, tai $f(x) \to -\infty$.
Taigi funkcijos reikšmių sritis $E(g) = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

d) $D_g = (-\infty; 3]$; $g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{2\sqrt{3-x}-1}{2\sqrt{3-x}}$.
Spręsdami lygtį $2\sqrt{3-x} = 1$ randame kritinį tašką $x = \frac{11}{4}$ (vienintelis kritinis taškas visoje D_g).
$g'(x) > 0$, kai $x < \frac{11}{4}$; $g'(x) < 0$, kai $\frac{11}{4} < x < 3$.
Taigi $g\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ — maksimumas. Vadinasi, didesnių už $3\frac{1}{4}$ reikšmių funkcija neįgyja.
Kaip funkcija elgiasi, kai $x \to -\infty$? Pertvarkykime funkciją taip:
$g(x) = x + \sqrt{3-x} = \frac{(x+\sqrt{3-x})(x-\sqrt{3-x})}{x-\sqrt{3-x}} = \frac{x^2+x-3}{x-\sqrt{3-x}} = \frac{x+1-\frac{3}{x}}{1-\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}}$.
Dabar lengva matyti, kad $g(x) \to -\infty$, kai $x \to -\infty$.
Taigi $E(g) = \left(-\infty; 3\frac{1}{4}\right]$.

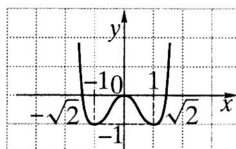
48. a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$;
1) $D_f = \boldsymbol{R}$;
2) funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė;
3) koordinačių ašis funkcijos grafikas kerta taškuose $(0; 0)$ ir $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$;
4) $f'(x) = 6x^2 + 6x$; $f'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 0$;
$f'(x) > 0$, kai $x < -1$ ir $x > 0$, vadinasi, intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(0; +\infty)$ funkcija yra didėjanti;
$f'(x) < 0$, kai $-1 < x < 0$, vadinasi, intervale $(-1; 0)$ funkcija yra mažėjanti.
Taške $x = -1$ funkcija įgyja maksimumą $f(-1) = 1$, o taške $x = 0$ — minimumą $f(0) = 0$;
5) kai $x \to +\infty$, tai $f(x) = x^2(2x+3) \to +\infty$;
kai $x \to -\infty$, tai $f(x) = x^2(2x+3) \to -\infty$.



b) $f(x) = x^3 - 3x$;
1) $D_f = \boldsymbol{R}$;
2) funkcija yra nelyginė;
3) koordinačių ašis funkcijos grafikas kerta taškuose $(0; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$ ir $(\sqrt{3}; 0)$;
4) $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$;
$f'(x) > 0$, kai $x < -1$ ir $x > 1$, vadinasi, intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$ funkcija yra didėjanti;
$f'(x) < 0$, kai $-1 < x < 1$, vadinasi, intervale $(-1; 1)$ funkcija yra mažėjanti.
Taške $x = -1$ funkcija įgyja maksimumą $f(-1) = 2$, o taške $x = 1$ — minimumą $f(1) = -2$;
5) kai $x \to +\infty$, tai $f(x) \to +\infty$; kai $x \to -\infty$, tai $f(x) \to -\infty$.



c) $f(x) = x^4 - 2x^2$;
1) $D_f = \boldsymbol{R}$;
2) funkcija yra lyginė;
3) koordinačių ašis funkcijos grafikas kerta taškuose $(0; 0)$, $(-\sqrt{2}; 0)$ ir $(\sqrt{2}; 0)$;
4) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $f'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$;
$f'(x) > 0$, kai $-1 < x < 0$ ir $x > 1$;
$f'(x) < 0$, kai $x < -1$ ir $0 < x < 1$.
Taškuose $x = -1$ ir $x = 1$ funkcija įgyja minimumus $f(-1) = f(1) = 1$, o taške $x = 0$ — maksimumą $f(0) = 0$;
5) kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$, tai $f(x) = x^2(x^2 - 2) \to +\infty$.



d) $f(x) = x^4 + 2x^3$;

1) $D_f = \boldsymbol{R}$;

2) funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė;

3) koordinačių ašis funkcijos grafikas kerta taškuose (0; 0) ir (−2; 0);

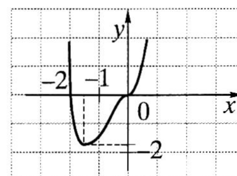
4) $f'(x) = 4x^3 + 6x^2$, $f'(x) = 0$, kai $x = -1{,}5$;

$f'(x) > 0$, kai $-1{,}5 < x < 0$ ir $x > 0$;

$f'(x) < 0$, kai $x < -1{,}5$.

Taške $x = -1{,}5$ funkcija įgyja minimumą $f(-1{,}5) = -1{,}6875$, o taške $x = 0$ ekstremumo nėra;

5) kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$, tai $f(x) = x^4(1 + \frac{2}{x}) \to +\infty$.



49. a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

1) $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) funkcija yra nelyginė;

3) koordinačių ašių funkcijos grafikas nekerta, nes lygtis $x + \frac{1}{x} = 0$ sprendinių neturi;

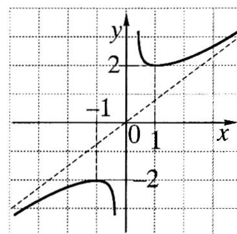
4) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, $f'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$;

$f'(x) > 0$, kai $x < -1$ ir $x > 1$;

$f'(x) < 0$, kai $-1 < x < 0$ ir $0 < x < 1$.

Taške $x = -1$ funkcija įgyja maksimumą $f(-1) = -2$, o taške $x = 1$ — minimumą $f(1) = 2$;

5) kai $x \to +\infty$, tai $f(x) \to +\infty$; kai $x \to -\infty$, tai $f(x) \to -\infty$; kai $x \to 0$ $(x < 0)$, tai $f(x) \to -\infty$; kai $x \to 0$ $(x > 0)$, tai $f(x) \to +\infty$.



b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$;

1) Iš nelygybių sistemos $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2 - x \geqslant 0 \end{cases}$ randame, kad $D_f = [0; 2]$;

2) funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė;

3) kadangi $\sqrt{x} \geqslant 0$ ir $\sqrt{2 - x} \geqslant 0$, tai funkcija $f(x)$ visoje D_f yra neneigiama. Dar daugiau: kai $x = 0$ ir $x = 2$, tai $f(x) > 0$, todėl funkcija nuliu nevirsta ir visame intervale.

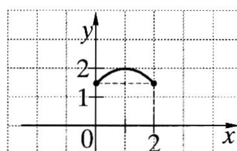
Funkcijos grafikas kerta Oy ašį taške $(0; \sqrt{2})$;

4) $f'(x) = \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x(2-x)}}$, $f'(x) = 0$, kai $x = 1$;

$f'(x) > 0$, kai $0 < x < 1$;

$f'(x) < 0$, kai $1 < x < 2$;

$f(1) = 2$ — maksimumas. Intervalo galuose: $f(0) = \sqrt{2}$, $f(2) = \sqrt{2}$.



c) $f(x) = x\sqrt{3 - x}$;

1) $D_f = (-\infty; 3]$;

2) funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė;

3) koordinačių ašis funkcijos grafikas kerta taškuose (0; 0) ir (3; 0);

4) $f'(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x-2}{\sqrt{3-x}}$, $f'(x) = 0$, kai $x = 2$;

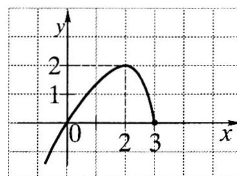
$f'(x) > 0$, kai $x < 2$;

$f'(x) < 0$, kai $2 < x < 3$;

$f(2) = 2$ — maksimumas;

5) kai $x \to 3$ $(x < 3)$, tai $f'(x) \to -\infty$, vadinasi, taške $x = 3$ funkcijos grafikas turi vertikalią liestinę.

Kadangi $f'(0) = \sqrt{3}$, tai funkcijos grafikas koordinačių pradžios taške turi liestinę, su Ox ašimi sudarančią 60° kampą.



d) $f(x) = (x - 1)e^x$;

1) $D_f = \boldsymbol{R}$;

2) funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė;

3) taške (1; 0) funkcijos grafikas kerta Ox ašį;

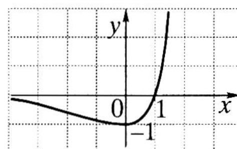
4) $f'(x) = xe^x$, $f'(x) = 0$, kai $x = 0$;

$f'(x) > 0$, kai $x > 0$;

$f'(x) < 0$, kai $x < 0$;

$f(0) = -1$ — minimumas

5) kai $x \to +\infty$, tai $f(x) \to +\infty$; kai $x \to -\infty$, tai $f(x) \to 0$.



50. a) $\min\limits_{[0;4]} g(x) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} g(x) = 20$;

b) $\min\limits_{[-1;2]} g(x) = -4$, $\max\limits_{[-1;2]} g(x) = 4$;

c) $\min\limits_{[-1;3]} g(x) = -16$, $\max\limits_{[-1;3]} g(x) = 11$;

d) $\min\limits_{[-2;2]} g(x) = -4$, $\max\limits_{[-2;2]} g(x) = 0$.

51. a) $\min\limits_{[-4;2]} g(x) = -\frac{1}{4}$, $\max\limits_{[-4;2]} g(x) = \frac{1}{4}$;

b) $\min\limits_{[0;\ln 100]} g(x) = -3$, $\max\limits_{[0;\ln 100]} g(x) = \mathrm{e}^{-4}$.

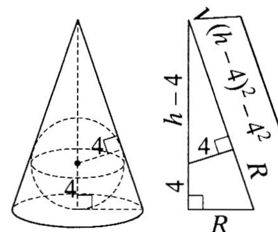
52. Raskime funkcijos $h(x) = x^3 - 3x + a$ ekstremumo taškus, priklausančius intervalui $[-2; 0]$. Kadangi $h'(x) = 3x^2 - 3$, tai $h'(x) = 0$, kai $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$. Intervalui $[-2; 0]$ priklauso taškas $x = -1$. Raskime funkcijos $h(x)$ reikšmes taškuose $x = -2$, $x = -1$ ir $x = 0$: $h(-2) = -2+a$, $h(-1) = 2+a$, $h(0) = a$. Su kiekviena a reikšme $a-2 < a < a+2$. Taigi didžiausią reikšmę funkcija $h(x)$ įgyja taške $x = -1$. Kad ta reikšmė būtų lygi 5, tai turi būti teisinga lygybė $2 + a = 5$, $a = 3$.
Atsakymas. $a = 3$.

53. $f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x + 1\right)' = -x^2 + 1$. Akivaizdu, kad intervale $[-2; 2]$ ši funkcija mažiausią reikšmę įgyja intervalo galuose: $f'(-2) = f'(2) = -3$.
Aišku, galima skaičiuoti ir taip:
$(f'(x))' = (-x^2 + 1)' = -2x$; $-2x = 0$, kai $x = 0$. Skaičiuojame:
$f'(-2) = -(-2)^2 + 1 = -3$, $f'(0) = 1$, $f'(2) = -2^2 + 1 = -3$.
Taigi mažiausia funkcijos $f(x)$ išvestinės reikšmė intervale $[-2; 2]$ lygi -3.

54. Tegu vienas skaičius yra x. Tada kitas skaičius yra $20 - x$, $0 \leqslant x \leqslant 20$. Raskime funkcijos $f(x) = x^3 + (20-x)^2$ mažiausią reikšmę intervale $[0; 20]$: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 40$; $f'(x) = 0$, kai $x_1 = -4$ ir $x_2 = 3\frac{1}{3}$; $f(0) = 400$, $f\left(3\frac{1}{3}\right) = 314\frac{22}{27}$, $f(20) = 8000$ ($x = -4$ nepatenka į intervalą $[0; 20]$). Taigi mažiausią reikšmę funkcija $f(x)$ įgyja, kai $x = 3\frac{1}{3}$; kitas skaičius yra $16\frac{2}{3}$.
Atsakymas. $20 = 3\frac{1}{3} + 16\frac{2}{3}$.

55. Tegu dėžės pagrindo krašto ilgis yra a m, o dėžės aukštis h m. Tada dėžės paviršiaus plotas $S_{\text{pav}} = a^2 + 4ah$, o dėžės tūris $V = a^2h$.
Pagal sąlygą $V = 4\,\text{m}^3$, tai $a^2h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{a^2}$ ir $S_{\text{pav}} = a^2 + \frac{16}{a}$.
Taigi paviršiaus plotą S galime nagrinėti kaip pagrindo kraštinės ilgio a funkciją: $S(a) = a^2 + \frac{16}{a}$. Reikia surasti mažiausią šios funkcijos reikšmę intervale $(0; +\infty)$. Kai $a \to 0$, $S(a) \to +\infty$; kai $a \to +\infty$, $S(a) \to +\infty$. Nustatome, kad taške $a = 2$ funkcija įgyja minimumą $S(2) = 12$. Tai ir bus funkcijos $S(a)$ mažiausia reikšmė. Taigi mažiausiai medžiagos reikės pagaminti dėžei, kurios pagrindo krašto ilgis yra 2 m, o aukštis — 1 m, t. y. dėžė bus pusės kubo formos.

56. Tegu kūgio aukštinė yra h, o pagrindo spindulys R. Aišku, kad $h > 8$.
Pagal Pitagoro teoremą $h^2 + R^2 = (R + \sqrt{h^2 - 8h})^2$ (žr. brėžinį paraštėje).
Iš čia $R = \frac{4h}{\sqrt{h^2-8h}}$.
Taigi kūgio tūrį V galime nagrinėti kaip kūgio aukštinės h funkciją:
$V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4h}{\sqrt{h^2-8h}}\right)^2 \cdot h = \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{h^2}{h-8}$.
Toliau panašiai spręsdami kaip 55 uždavinį gausime, kad apie 4 cm spindulio rutulį apibrėžto kūgio tūris bus mažiausias, kai kūgio aukštinės ilgis yra 16 cm.



57. Atstumai tarp troleibusų lygūs $25 \cdot \frac{16}{60} = \frac{20}{3}$ km.
Tarkime, kad ką tik žmogų pralenkė vienas troleibusas. Kad jį pralenktų kitas, jam teks nuvažiuoti $\frac{20}{3}$ km ir dar tiek, kiek žmogus nuėjo. Jeigu tai įvyks po x minučių, tai $25 \cdot \frac{x}{60} = \frac{20}{3} + 5 \cdot \frac{x}{60}$, $x = 20$ minučių.

Panašiai samprotaudami sudarome lygtį dydžiui y — kas kiek minučių žmogus sutiks priešais atvažiuojantį troleibusą:

$25 \cdot \frac{y}{60} = \frac{20}{3} - 5 \cdot \frac{y}{60}$, $y = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ minutės.

58. a) $a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) =$
$(a - b)(a + b)((a^2 + b^2)^2 - a^2b^2) =$
$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$;
arba: $a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) =$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$
$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$;

b) $(a+b)^3 - (a-b)^3 = (a+b-a+b)((a+b)^2 + (a+b)(a-b) + (a-b)^2) =$
$2b(3a^2 + b^2)$;
arba: $(a+b)^3 - (a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3 =$
$6a^2b + 2b^3 = 2b(3a^2 + b^2)$.

59. Pažymėkime $y = \sqrt{x^2 + 5x + 28}$.
Tada $x^2 + 5x + 4 = y^2 - 24$, ir duotoji lygtis tampa tokia:
$y^2 - 24 = 5y \Rightarrow y^2 - 5y - 24 = 0 \Rightarrow y_1 = 8, y_2 = -3$.
Tinka tik pirmasis sprendinys, taigi
$\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 8, x^2 + 5x - 36 = 0, x_1 = -9, x_2 = 4$.
Atsakymas. -9; 4.

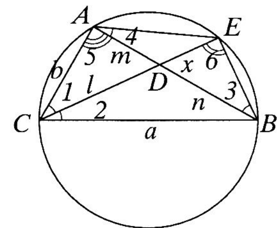
60. a) $\frac{1}{x-3} > 2$, $\frac{1}{x-3} - 2 > 0$, $\frac{7-2x}{x-3} > 0$, $x \in \left(3; 3\frac{1}{2}\right)$.
b) Kadangi $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, tai spręsdami nelygybę $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-5)} > 0$ intervalų metodu gauname tokią sprendinių aibę: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (5; +\infty)$.

61. a) Pakeitę $y = 2^x$ gauname lygtį:
$4y - \frac{4}{y} = 15 \Rightarrow 4y^2 - 15y - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 4, y_2 = -\frac{1}{4}$.
Tada $2^x = 4$, $x = 2$; lygtis $2^x = -\frac{1}{4}$ sprendinių neturi.
b) Duotą lygtį perrašykime taip: $5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 3 = 2\left(\frac{5}{2}\right)^x$. Pažymėję $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y$, gauname: $5y + 3 = 2 \cdot \frac{1}{y}$, $5y^2 + 3y - 2 = 0$, $y_1 = \frac{2}{5}$, $y_2 = -1$. Taigi pradinės lygties sprendinys yra $x = 1$.

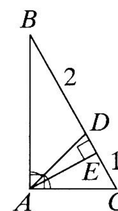
62. Pažymėkime juostelės storį s cm. Galime įsivaizduoti, kad suvyniotą į ritę juostelę sudaro n sluoksnių — koncentrinių apskritimų. Pirmojo sluoksnio juostelės ilgis $a_1 = 2{,}4\pi$, antrojo sluoksnio — $a_2 = (2{,}4 + 2s)\pi = a_1 + 2s\pi$ ir t. t. Taigi skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas $d = 2s\pi$. Žinome, kad $a_n = 4{,}8\pi$ ir $S_n = a_1 + \cdots + a_n = 8478 \approx 2700\pi$.
Kai juostelė yra pervyniojama, ritė apsisuka lygiai n kartų. Dydžių n ir s reikšmes randame iš sistemos:
$$\begin{cases} a_n = 4{,}8\pi, \\ S_n = 2700\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2{,}4\pi + 2s\pi(n-1) = 4{,}8\pi, \\ \frac{2{,}4\pi + 4{,}8\pi}{2} \cdot n = 2700\pi \end{cases} \Rightarrow$$
$n = 750$, $s = \frac{1{,}2}{749} \approx 0{,}0016\,\text{cm} = 0{,}016\,\text{mm}$.

63. Iš sąlygos sudarome lygčių sistemą:
$$\begin{cases} (AE + EC + AC) - (AB + BD + AD) = 5, \\ AB + BC + AC = 35 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} AC = 5 + AB, \\ AB + AB + 5 + AB = 35 \end{cases} \Rightarrow$$
$AB = 10\,\text{cm}$, $AC = 15\,\text{cm}$.
Atsakymas. 10 cm, 10 cm, 15 cm.

64. Pažymėkime $DE = x$ (žr. brėžinį paraštėje).
Kadangi $\angle 1 = \angle 2$, tai $\smile AE = \smile EB$ ir $AE = EB$. Kadangi $\angle 3$ remiasi į lanką AE, $\angle 4$ remiasi į lanką EB, tai $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Kadangi $\angle 5$ ir $\angle 6$ remiasi į tą patį lanką BC, tai $\angle 5 = \angle 6$.
Tada $\triangle ADC \backsim \triangle EDB$ (trikampių panašumo požymis pagal du kampus), tai $\frac{l}{n} = \frac{m}{x}$ arba $lx = mn$; $\triangle ADC \backsim \triangle EBC$, tai $\frac{l}{a} = \frac{b}{l+x}$ arba $l^2 + lx = ab$. Bet $lx = mn$, tai $l^2 = ab - mn$.



65. Pagal trikampio pusiaukampinės savybę $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$. Iš $\triangle AEC \backsim \triangle BAC$ (smailieji kampai lygūs): $\frac{CE}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, $CE = \frac{1}{2}AE$.
Iš $\triangle AEB \backsim \triangle BAC$ (smailieji kampai lygūs): $\frac{EB}{AE} = \frac{AB}{AC} = 2$, $EB = 2AE$.
Tada $\frac{CE}{EB} = \frac{\frac{1}{2}AE}{2AE} = \frac{1}{4}$.
Atsakymas. $\frac{1}{4}$.



66. Tegu n — daugiakampio kraštinių skaičius. Iš vienos viršūnės galima išvesti $n-3$ įstrižaines. Iš viso n-kampis turi $\frac{(n-3)n}{2}$ įstrižainių. Pagal sąlygą sudarome lygtį:
a) $\frac{(n-3)n}{2} = 3n \Rightarrow n_1 = 0$ (netinka) ir $n_2 = 9$;
b) $\frac{(n-3)n}{2} = n + 12 \Rightarrow n_1 = -3$ (netinka) ir $n_2 = 8$.
Atsakymas. a) 9; b) 8.

67. Suma visų daugiakampio priekampių, paimtų po vieną prie kiekvienos viršūnės, lygi 360°. Vadinasi, bukųjų priekampių negali būti daugiau nei trys. Todėl iškilajame daugiakampyje yra ne daugiau nei 3 smailieji kampai.
Atsakymas. 3.

68. Pažymėkime kvadrato kraštinės ilgį a. Tada kvadrato plotas lygus a^2, o gautojo stačiakampio plotas lygus $(a-4)(a-5)$.
Pagal sąlygą $a^2-(a-4)(a-5)=160$, $a=20\,\text{cm}$. Tada kvadrato plotas lygus $20^2=400\,\text{cm}^2$ ir jis sumažės $\frac{160}{400}\cdot 100\% = 40\%$.
Atsakymas. 40%.

69. Tegu pradinio stačiakampio ilgis yra x, o plotis y. Tada jo plotas lygus xy. Stačiakampio ilgį padidinus 10%, o plotį sumažinus 5%, gautojo stačiakampio plotas lygus $1{,}1x\cdot 0{,}95y = 1{,}045xy$. Taigi stačiakampio plotas padidėjo $\frac{1{,}045xy-xy}{xy}\cdot 100 = 4{,}5\%$.
Atsakymas. 4,5%.

70. Jeigu visi trys ištrinti laiškai buvo su geromis naujienomis, tai draugas gavo tiek pat laiškų su blogomis naujienomis, kaip ir Algis. Tokio įvykio tikimybė yra $\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$. Tada priešingojo įvykio tikimybė, t. y. tikimybė, kad draugas gavo mažiau laiškų su blogomis naujienomis, yra $1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$.

71. Yra C_5^3 galimybės atsakyti teisingai į lygiai 3 klausimus; renkantis atsakymus atsitiktinai kiekvienos iš tokių galimybių tikimybė yra
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3^5}$.
Yra C_5^1 galimybių duoti 4 teisingus atsakymus; kiekvienos iš tokių galimybių tikimybė lygi $\frac{2}{3^5}$.
Yra 1 galimybė atsakyti į visus klausimus; šios galimybės tikimybė yra $\frac{1}{3^5}$.
Taigi tikimybė išlaikyti testą renkantis atsakymus atsitiktinai yra
$C_5^3\cdot\frac{4}{3^5}+C_5^1\cdot\frac{2}{3^5}+\frac{1}{3^5}=\frac{51}{243}\approx 0{,}2$.

72. Tegu A_{isp}, A_{pr} — įvykiai, kad susitikus salos gyventoją su juo bus galima susikalbėti ispaniškai, prancūziškai. Tada $A_{\text{isp}}\cup A_{\text{pr}}$ — reiškia įvykį, kad su juo galėsime susikalbėti arba ispaniškai, arba prancūziškai, o $A_{\text{isp}}\cap A_{\text{pr}}$ — kad galėsime susikalbėti ir ispaniškai, ir prancūziškai.
Žinome, kad $\mathbf{P}(A_{\text{isp}}\cup A_{\text{pr}})=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$, $\mathbf{P}(A_{\text{isp}})=\frac{6}{10}$, $\mathbf{P}(A_{\text{pr}})=\frac{5}{10}$. Tada $\mathbf{P}(A_{\text{isp}}\cap A_{\text{pr}})=\mathbf{P}(A_{\text{isp}})+\mathbf{P}(A_{\text{pr}})-\mathbf{P}(A_{\text{isp}}\cup A_{\text{pr}})=\frac{6}{10}+\frac{5}{10}-\frac{7}{10}=\frac{2}{5}$.
Dar paprasčiau iš pradžių įsitikinti, kad 40% gyventojų kalba ir ispaniškai, ir prancūziškai. Todėl ieškoma tikimybė yra $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$.

73. Tegu B reiškia įvykį „užkibo stambi žuvis“, o A — „užkibo karpis“. Reikia surasti sąlyginę tikimybę $\mathbf{P}(A|B)$. Tikriausiai gerai supratę sąlygą mokiniai, iš karto pasakys, kad $\mathbf{P}(A|B)=0{,}6$. Iš tiesų, pačioje sąlygoje netiesiogiai pasakyta, kad $\mathbf{P}(A|B)=0{,}6$, $\mathbf{P}(\overline{A}|B)=0{,}4$.
Tą patį gautume, jeigu sąlyginę tikimybę skaičiuotume pagal apibrėžimą
$\mathbf{P}(A|B)=\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.

74. Tiek pirmas, tiek ir antras draugas gali ateiti į vieną iš trijų vietų. Taigi iš viso yra $3\cdot 3=9$ skirtingi būdai dviem draugams ateiti į tris vietas ir yra tik trys būdai, kai abu draugai ateis į tą pačią vietą (arba prie rotušės, arba prie Arkikatedros, arba į Sereikiškių parką). Tikimybė, kad draugai 15 valandą susitiks, lygi $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

75. Penki žmonės 5 sunumeruotų kėdžių eilėje gali susėsti $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ skirtingų būdų. Viena pora susidarys tik tada, kai abi merginos sėdės greta arba 1-oje ir 2-oje, arba 4-oje ir 5-oje vietose. Kadangi vietas pasirinkti jos gali dviem būdais, o pasirinkusios vietas jos gali susėsti dviem būdais, tai iš viso jos gali susėsti $2\cdot 2=4$ skirtingais būdais. Kai merginos jau susėdo, vaikinai turi tris vietas, todėl gali susėsti $3\cdot 2\cdot 1=6$ skirtingais būdais. Vadinasi, susėsti taip, kad susidarytų lygiai viena pora, yra $4\cdot 6=24$ skirtingos galimybės. Tikimybė, kad susidarys lygiai viena pora, lygi $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$.

II. INTEGRALAI

8. PIRMYKŠTĖS FUNKCIJOS IR NEAPIBRĖŽTINIAI INTEGRALAI

8.1. Pirmykštės funkcijos sąvoka

Vienas iš šiame vadovėlyje iki šiol nagrinėtų klausimų — kas yra funkcijos išvestinė ir kaip ją rasti. Žvilgtelėję į taip suformuluotą klausimą

$$(f(x))' = ?$$

suprantame, kad reikia rasti funkcijos $f(x)$ išvestinę. O dabar sukeiskime klaustuką ir funkcijos žymenį vietomis:

$$(?)' = f(x).$$

Ką reikia rasti dabar? Funkciją, iš kurios diferencijuojant gaunama funkcija $f(x)$. Taigi reikia rasti funkciją, iš kurios atsirado $f(x)$, t. y. šios funkcijos pirmykštę. Į tą pačią funkciją galima žvelgti ir kaip į išvestinę, ir kaip pirmykštę, kaip kad tas pats žmogus gali būti ir sūnus, ir tėvas. Kadangi $(x^3)' = 3x^2$, tai $f(x) = 3x^2$ yra funkcijos $g(x) = x^3$ išvestinė. Tačiau $f'(x) = 6x$, todėl funkcija $f(x)$ yra funkcijos $h(x) = 6x$ pirmykštė. Galima kiek „pažaisti“ klausinėjant „kokios funkcijos išvestinė yra $f(x)$?“, „kokios funkcijos pirmykštė yra $f(x)$?“, kad moksleiviai gerai skirtų šias sąvokas ir mokėtų patikrinti, ar nurodyta funkcija yra kitos funkcijos pirmykštė, ar ne.

Po to jau galima atkreipti dėmesį į svarbų faktą: jei funkcija turi išvestinę, tai tik vienintelę, tačiau pirmykščių daug, netgi be galo daug. Visa begalinė pirmykščių funkcijų šeima užrašoma kaip suma, kurios vienas dėmuo pastovus, bet galintis įgyti bet kurią reikšmę. Nelengva paaiškinti, kodėl reiškinys, kuriuo užrašomos visos funkcijos $f(x)$ pirmykštės, žymimas taip keistai:

$$\int f(x)\mathrm{d}x,$$

tačiau tai tradicija ir teks prie jos taikytis. Pasimokykime kiek „pažongliruoti“ simboliais:

kadangi

$$(x^3)' = 3x^2$$

tai

$$\int (3x^2)\mathrm{d}x = x^3 + C;$$

norėdami nustatyti, ar

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C,$$

tikriname, ar

$$(-\cos x)' = \sin x.$$

Taigi svarbiausias dalykas, kurio reikia išmokti iš šio skyrelio medžiagos — mokėti pagal lygybę su išvestine užrašyti lygybę su neapibrėžtiniu integralu ir atvirkščiai.

Suvokiame ir žinome:

kas yra funkcijos pirmykštė;

kaip žymimas reiškinys, iš kurio gaunamos visos funkcijos pirmykštės.

Mokame:

pagal lygybę su funkcijos išvestine užrašyti lygybę su integralu;

patikrinti, ar lygybė su integralu yra teisinga.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

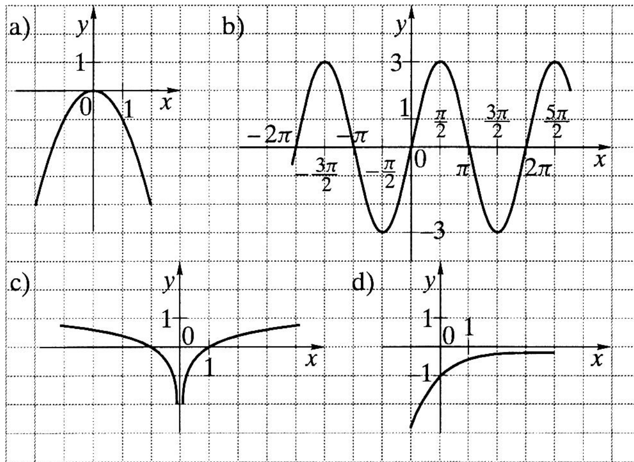
Atlikdami 1–3 užduočių pratimus moksleiviai turėtų įprasti gerai skirti išvestinės ir pirmykštės funkcijos sąvokas. 4–5 užduotyse reikalaujama iš pirmykščių funkcijų šeimos išskirti vieną, einančią per nurodytą tašką. Tiems, kas gerai įvaldė naująsias sąvokas, galima pasiūlyti išspręsti 7 uždavinį, kuriame reikalaujama surasti funkciją su iš anksto nurodytomis grafiko savybėmis.

1. *Nurodymas.* Remkitės pirmykštės funkcijos apibrėžimu.
Atsakymas. a) $f(x) = 6x^5$; b) $f(x) = 5x^4 - 4x^3$; c) $f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$;
d) $f(x) = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$; e) $f(x) = -2\sin x + 1$; f) $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$;
g) $f(x) = 3(\mathrm{e}^{3x} - x^2)$; h) $f(x) = \frac{2}{x}$.

2. *Nurodymas.* Užtenka patikrinti, kad $F'(x) = f(x)$.
a) $f(x) = F'(x) = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x$;
b) $f(x) = (\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{tg}\,x)' = \mathrm{e}^x - \frac{2}{\cos^2 x}$;
c) $f(x) = (\sqrt{2x+1})' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$;
d) $f(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

3. a) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$; b) $F(x) = 2\ln|x| + C$; c) $F(x) = \sqrt{x} + C$;
d) $F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$; e) $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + C$; f) $F(x) = -3\cos x + C$.

4. a) $F(x) = -x^2 + C$; b) $F(x) = 3\sin x + C$; c) $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + C$;
d) $F(x) = -e^{-x} + C$.
Nubraižykime funkcijos $F(x)$ grafiką, kai $C = 0$:



5. a) Bet kuri funkcijos $f(x) = 2x$ pirmykštė funkcija užrašoma formule $F(x) = x^2 + C$. Raskime pirmykštę, kurios grafikas eina per tašką $M(1; 1)$. Sprendžiame lygtį $1 = 1^2 + C$, $C = 0$. Vadinasi, ieškomoji pirmykštė funkcija yra $F(x) = x^2$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$; c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$; d) $F(x) = \sin x + \pi$.

6. *Nurodymas.* Norint patikrinti, ar teisinga lygybė $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, užtenka patikrinti, ar $F'(x) = f(x)$.
Atsakymas. Pateiktos lygybės yra teisingos.

7. Funkcijos grafiko liestinės krypties koeficientas $k = f'(x_0)$. Taigi norint rasti funkciją, kai žinomas taške $x = x_0$ nubrėžtos grafiko liestinės krypties koeficientas, reikia rasti $f'(x)$ pirmykštę funkciją $f(x)$, tenkinančią sąlygą $f(0) = 0$.
a) Kadangi $f'(x) = 2x$, tai jos pirmykštė funkcija yra $x^2 + C$. Sprendžiame lygtį $0 + C = 0$, $C = 0$. Taigi funkcija yra $f(x) = x^2$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = \frac{x^2}{2} + x$; d) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x$.

8.2. Neapibrėžtinių integralų savybės

Mokydamiesi diferencijavimo įpratome naudotis taisyklėmis: funkcijų sumos (skirtumo) išvestinė lygi išvestinių sumai (skirtumui); skaičiuojant funkcijos ir skaičiaus sandaugos išvestinę, skaitinį daugiklį galima iškelti prieš išvestinės ženklą. Pakeitę žodį „išvestinė" žodžiais „neapibrėžtinis integralas" gauname neapibrėžtinių integralų skaičiavimo taisykles. Galima jas suformuluoti ir taikyti kaip paprastas formalias integravimo taisykles, ir tiek. Tačiau sugretinus savo išvaizda analogiškas lygybes

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x),$$

$$\int (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

ir įsižiūrėjus, galima padaryti išvadą, kad jos tik išvaizda panašios, o jų „turiniai" skiriasi. Pirmoji lygybė — tai teiginys apie dviejų funkcijų lygybę; antroji — šiek tiek miglotas teiginys apie dviejų reiškinių lygybę, o dar tiksliau — apie lygybę funkcijų aibių, gaunamų dviem skirtingais būdais.

Tačiau daug samprotauti apie šias taisykles neverta. Paaiškinus teiginius apie funkcijų sumos, skaičiaus ir funkcijos sandaugos pirmykštes funkcijas, kurie neturėtų kelti daug abejonių, galima iškart parodyti, kaip jie taikomi kaip formalios integravimo taisyklės (3 ir 4 pavyzdžiai, 114 psl.).

Šios dvi taisyklės rodo tam tikrą išvestinių ir integralų skaičiavimo technikos panašumą. Tačiau analogija dingsta, kai lyginame sudėtinių funkcijų išvestinių ir integralų skaičiavimą. Žinome, kaip skaičiuoti bet kokios sudėtinės funkcijos išvestinę. Tačiau integralo skaičiavimo taisyklę galima suformuluoti tik paprasčiausiu sudėtinės funkcijos atveju, t. y. funkcijai $f(ax+b)$. Galima prieš suformuluojant ir paaiškinant šią taisyklę pasiūlyti ją patiems atrasti: žinome, kad

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + C;$$

tikriname:

$$(\sin x)' = \cos x;$$

pabandykime surasti funkcijos $\cos(2x+3)$ integralą: tarkime, kad

$$\int \cos(2x+3)\,\mathrm{d}x = \sin(2x+3) + C;$$

tikriname:

$$\big(\sin(2x+3)\big)' = 2\cos(2x+3).$$

Taigi paskutinioji lygybė su integralu neteisinga, pabandykime ją ištaisyti.

Suvokiame ir žinome:

funkcijų sumos (skirtumo), funkcijos ir skaičiaus sandaugos integralų skaičiavimo taisykles;

paprasčiausios sudėtinės funkcijos integralo skaičiavimo taisyklę.

Mokame pertvarkyti integruojamą funkciją taip, kad galėtume taikyti integravimo taisykles, teisingai jomis pasinaudoti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Užduotys 8–12 skirtos vien naujųjų integravimo taisyklių taikymo įgūdžiams įtvirtinti. Būtų gerai, jei šias pratimų funkcijas moksleiviai išmoktų integruoti kone „mintinai". Integruojant kitų pratimų funkcijas pirmiausiai tenka atlikti tam tikrus funkcijų pertvarkius.

8. a) Kadangi funkcijos x^5 pirmykštė funkcija yra $\frac{1}{6}x^6$, tai funkcijos $6x^5$ pirmykštė funkcija yra $6\cdot\frac{1}{6}x^6 = x^6$. Kadangi funkcijos x^2 pirmykštė funkcija yra $\frac{1}{3}x^3$, tai funkcijos $3x^2$ pirmykštė funkcija yra $3\cdot\frac{1}{3}x^3 = x^3$. Todėl funkcijos $6x^5+3x^2$ pirmykštė funkcija yra x^6+x^3.
Taigi $\int(6x^5+3x^2)\,\mathrm{d}x = x^6+x^3$.

Analogiškai samprotaudami randame ir punktuose b)–d) pateiktų funkcijų pirmykštes funkcijas:

b) $F(x) = 6x^4 - 4x^3 + x$; c) $F(x) = \frac{1}{4}x\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2}$;
d) $F(x) = -3\cos x - 5\mathrm{e}^x$.

Pastaba. Prie rastos pirmykštės funkcijos galima pridėti bet kokį skaičių C — išvestinė nuo to nepasikeis.

9. a) $\frac{x^2}{2} + x^3 + C$; b) $x^2 - x^4 + C$; c) $\frac{x^3}{3} + x^5 + C$; d) $x - x^{10} + C$;
e) $-\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + C$; f) $2\ln|x| + \frac{x^2}{2} + C$; g) $\frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$;
h) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + C$.

10. *Nurodymas.* Funkcijos $f(x)$ pirmykštes funkcijas randame remdamiesi sudėtinės funkcijos $f(ax+b), a, b \in \boldsymbol{R}$, pirmykštės funkcijos radimo taisykle (žr. vadovėlyje p. 115).

a) Kadangi funkcijos x^4 pirmykštė funkcija yra $\frac{1}{5}x^5$, tai funkcijos
$f(x) = (3x+2)^4$ pirmykštė funkcija yra $F(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^5}{5} = \frac{(3x+2)^5}{15}$.

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $\frac{1}{2}\ln|2x-1|$; c) $\frac{4x+7}{6}\sqrt{4x+7}$; d) $\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}$; e) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2x+3}}{\ln 2}=\frac{2^{2x+2}}{\ln 2}$;
f) $-\sin(2-x)=\sin(x-2)$.

11. a) $\frac{(7x-1)^7}{49}+C$; b) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-x}+C$; c) $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$;
d) $-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin 3x+C$; e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x-1)+C$; f) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(2x+1)+C$;
g) $\frac{1}{4}\ln|4x+3|+C$; h) $-\frac{1}{2(2x+1)}+C$.
Nurodymas. Radus funkcijos neapibrėžtinį integralą patartina tuojau pat pasitikrinti diferencijuojant. Tai leis ne tik išvengti klaidų, bet ir tvirčiau suvokti, kas yra pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas.

12. a) $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(-2x+1)\,\mathrm{d}x=-\int 2x\,\mathrm{d}x+\int 1\,\mathrm{d}x=-2\cdot\frac{1}{2}x^2+x=-x^2+x+C$. Kadangi $F(-1)=2$, tai $-(-1)^2-1+C=2$ ir $C=4$. Taigi $F(x)=-x^2+x+4$.
b) $F(x)=\frac{2}{2x+1}-2$.
Pastaba. Atkreipkite dėmesį į sąlygoje nurodytą nelygybę $x>-\frac{1}{2}$. Ji rodo, kad duotoji funkcija bus nagrinėjama tik intervale $(-\frac{1}{2};+\infty)$. Tai susiję su tuo, kad pirmykštę funkciją logiška nagrinėti tik tam tikrame intervale — už trūkio taško būtų nebeaiškus pirmykščių tapatumas, nes jos gali būti gaunamos iš tos pačios pirmykštės su skirtingomis konstantomis.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
c) $F(x)=\sqrt{2x-1}+1$; d) $F(x)=\operatorname{tg}(2x)-1$.

13. a) $\int(2x+1)(x-2)\,\mathrm{d}x=\int(2x^2-3x-2)\,\mathrm{d}x=\int 2x^2\,\mathrm{d}x-\int 3x\,\mathrm{d}x-\int 2\,\mathrm{d}x=2\int x^2\,\mathrm{d}x-3\int x\,\mathrm{d}x-2\int\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+C$;
b) $\int(x+1)(2-x^2)\,\mathrm{d}x=\int(2x-x^3+2-x^2)\,\mathrm{d}x=$
$2\int x\,\mathrm{d}x-\int x^3\,\mathrm{d}x+2\int\mathrm{d}x-\int x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2+2x+C$;
c) $\int(3x^2+1)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int(3x^2+1)x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\int\left(3x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=$
$3\int x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x+\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=3\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{6}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$;
d) $\int(2x+3)\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\int(2x+3)x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x=\int\left(2x^{\frac{4}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x=$
$2\int x^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x+3\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{9}{4}x\sqrt[3]{x}+C$;
e) $\int\sin x(\cos x+3)\,\mathrm{d}x=\int(\sin x\cos x+3\sin x)\,\mathrm{d}x=$
$\int\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin x\cos x\,\mathrm{d}x+\int 3\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin(2x)\,\mathrm{d}x+3\int\sin x\,\mathrm{d}x=$
$-\frac{1}{4}\cos(2x)-3\cos x+C$;
f) $\int(\sin x\cos(3x)-\cos x\sin(3x))\,\mathrm{d}x=\int\sin(x-3x)\,\mathrm{d}x=\int\sin(-2x)\,\mathrm{d}x=$
$-\int\sin(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos(2x)+C$.

14. a) $\int\frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=x+\ln|x|+C$;
b) $\int\frac{2x^2-3x-2}{x}\,\mathrm{d}x=\int\left(2x-3-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=2\int x\,\mathrm{d}x-3\int\mathrm{d}x-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=$
$x^2-3x-2\ln|x|+C$;
c) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int(x-2)x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{1}{2}}-2\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=$
$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4\sqrt{x}=2\sqrt{x}\left(\frac{x}{3}-2\right)+C$;
d) $\int\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x=\int(x^2+1)x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{5}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x=$
$\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)+C$;
e) $\int\frac{\sqrt{x}-2}{x}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)x^{-1}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-1}\right)\mathrm{d}x=$
$\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x-2\int x^{-1}\,\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=2\sqrt{x}-2\ln|x|+C$;
f) $\int\frac{2x^3-1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int(2x-x^{-2})\,\mathrm{d}x=2\int x\,\mathrm{d}x-\int x^{-2}\,\mathrm{d}x=x^2+\frac{1}{x}+C$;
g) $\int\frac{1-4x^2\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int(x^{-2}-4\sin x)\,\mathrm{d}x=\int x^{-2}\,\mathrm{d}x-4\int\sin x\,\mathrm{d}x=$
$-\frac{1}{x}+4\cos x+C$;
h) $\int\frac{3+2\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}+2\cos x\right)\mathrm{d}x=3\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}+2\int\cos x\,\mathrm{d}x=$
$3\operatorname{tg}x+2\sin x+C$.

15. Taško nueitas kelias — greičio funkcijos pirmykštė funkcija. Todėl
$s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int\left(10-\frac{t}{5}\right)\mathrm{d}t=10\int\mathrm{d}t-\frac{1}{5}\int t\,\mathrm{d}t=10t-\frac{t^2}{10}+s_0$ (m);
s_0 nusako taško vietą pradiniu momentu: $s(0)=s_0$.
Per pirmąsias 5 sekundes nueitas kelias yra
$s(5)=s(5)-s(0)=50-\frac{25}{10}=47\frac{1}{2}$ (m).
Atsakymas. $47\frac{1}{2}$ m.

9. APIBRĖŽTINIAI INTEGRALAI

9.1. Kreivinės trapecijos plotas

Nors šiame skyrelyje nėra užduočių, pagrindines jame dėstomas idėjas aptarti tiesiog būtina. Nes jos sukuria tarsi kokį tvirtą pagrindą, ant kurio stovint jau galima „žaisti“ integralinio skaičiavimo simboliais.

Geometrija pateikia būdus lyginti (ir skaičiuoti) įvairiausių daugiakampių plotus. Dažniausiai tie daugiakampiai skaidomi į paprastesnius ir apskaičiuotos pastarųjų plotų reikšmės sumuojamos. Tačiau net menkas vienos vienintelės daugiakampio kraštinės „iškreivinimas“ sukelia didelę problemą: jau nebegalima naudotis tiksliomis plotų skaičiavimo formulėmis. 117 puslapyje pateiktuose brėžiniuose sugretinta įprastinė ir kreivinė trapecijos. Kaip skaičiuoti „tiesinės“ trapecijos plotą, žinome. Ploto formulė įrodoma skaidant trapeciją į du trikampius. Jokių galimybių pritaikyti tokį metodą kreivinėms trapecijoms, kurių gali būti kuo įvairiausių, nėra. Nejau kiekvienu atveju teks išradinėti naujus samprotavimus?

Kai patenkama į akligatvį, geriausia išeitis — pakeisti požiūrį. Naujasis požiūris į kreivinės trapecijos ploto skaičiavimą savo paprastumu gali pasirodyti netgi naivus ir nieko gero nežadantis: skaidykime kreivinę trapeciją mažytėmis kreivinėmis trapecijomis, pastarąsias keiskime stačiakampiais, skaičiuokime ir sumuokime stačiakampių plotus. Kas iš to išeis — pamatysime vėliau, o dabar galima tiesiog jį išbandyti: ar jį galima pritaikyti bent jau tiesinėms trapecijoms?

Suvokiame:

kaip kreivinę trapeciją keisti iš mažų stačiakampių sudaryta figūra;

kaip apytiksliai skaičiuoti kreivinės trapecijos plotą;

kaip sudaroma seka, kurios nariai artėja prie kreivinės figūros ploto reikšmės.

9.2. Apibrėžtinis integralas

Nors skyrelis pavadintas gana paslaptingai, skyrelio turinio esmę galima nusakyti kuo paprasčiausiai: neneigiamas reikšmes įgyjančios funkcijos apibrėžtiniu integralu pavadinamas tos funkcijos grafiku apribotos kreivinės trapecijos plotas; jeigu funkcija įgyja ir neigiamas reikšmes, tai integralu pavadinama algebrinė atitinkamų plotų suma.

Kam iš viso įvesti naują terminą dydžiams, kuriuos jau ir taip žinome, kaip vadinti? Verta atkreipti dėmesį, kad nors ir pradėjome nuo geometrinės sąvokos — ploto, bet tai, kas yra funkcijos apibrėžtinis integralas, galima paaiškinti visai neprisimenant geometrijos. Taigi galima pagrįstai tikėtis, kad integralas pravers ne tik skaičiuojant plotus. Panašiai juk yra su išvestine: kartais išvestinė interpretuojama kaip greitis, kartais — kaip liestinės krypties koeficientas, tačiau yra ir kitokių jos taikymų ir interpretacijų.

Suvokiame ir žinome:

kaip apibrėžtinį integralą interpretuoti geometriškai;

kaip sudaryti seką, artėjančią prie integralo reikšmės.

Mokame:

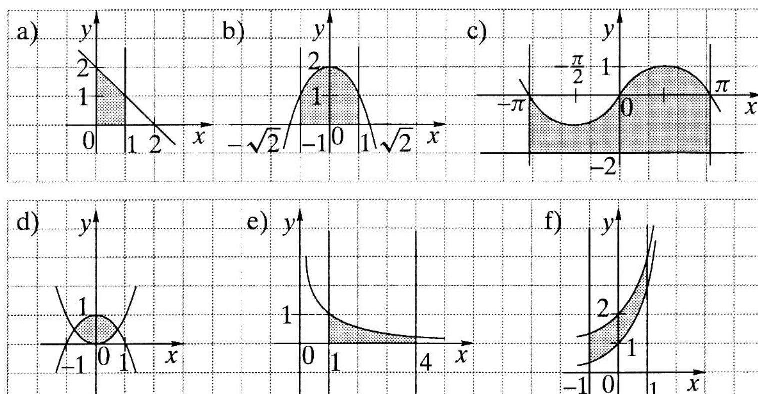
teisingai užrašyti integralo simbolius;

„geometriškai“ rasti paprastų integralų reikšmes skaičiuojant bei lyginant plotus.

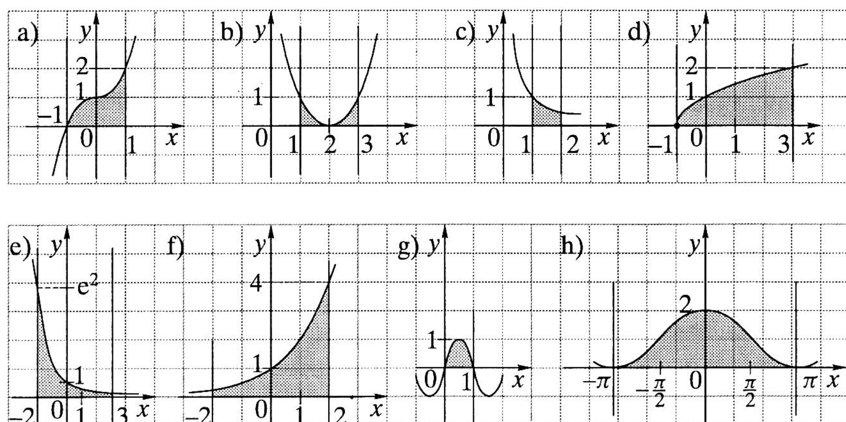
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Svarbiausias skyrelio pratimų tikslas — įpratinti naudotis integralų simbolika ir interpretuoti integralus geometriškai. Svarbiausios užduotys yra 17 ir 18. Atliekant šių užduočių pratimus kartu teks prisiminti ir pagrindinių funkcijų grafikus.

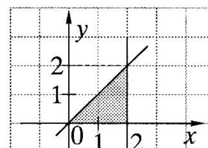
16.



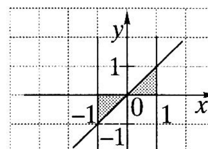
17. *Nurodymas.* Jei figūros plotas užrašomas integralu $\int_a^b f(x)\,dx$, tai koordinačių plokštumoje šią figūrą apriboja tiesės $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ir funkcijos $y = f(x)$ grafikas.



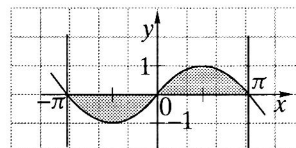
18. a) Integralas lygus trikampio plotui, todėl $\int_0^2 x\,dx = S_\Delta = \frac{2\cdot 2}{2} = 2$.



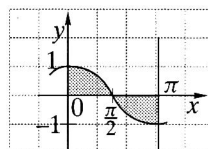
b) Trikampių plotai lygūs, bet integruojant jų ženklai priešingi, todėl $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$.



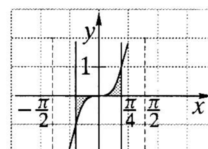
c) Figūros simetriškos koordinačių pradžios taško atžvilgiu, todėl jų plotai lygūs. Tačiau viena jų yra žemiau x ašies, todėl $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = S - S = 0$.



d) Figūros simetriškos taško $(\frac{\pi}{2}; 0)$ atžvilgiu, todėl jų plotai lygūs, bet integruojant imami su priešingais ženklais. Taigi $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = S - S = 0$.

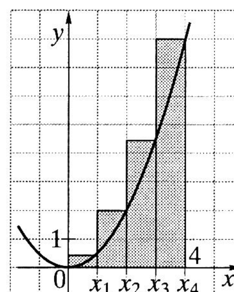


e) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = 0$.

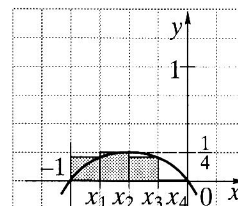


19. *Pastaba.* Sąlygoje yra netikslumas. Dalijimo taškai yra x_1, x_2 ir x_3. Taškas x_4 sutampa su dešiniuoju intervalo galu.

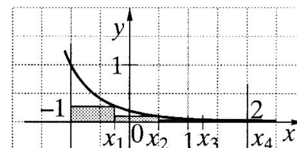
a) Padalykime intervalą $[0; 4]$ į keturis to paties ilgio Δx intervalus:
$\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$, $x_1 = \Delta x = 1$, $x_2 = 2\cdot\Delta x = 2\cdot 1 = 2$,
$x_3 = 3\cdot\Delta x = 3\cdot 1 = 3$, $x_4 = 4\cdot\Delta x = 4\cdot 1 = 4$.
Apskaičiuojame funkcijos reikšmes:
$f(x_1) = f(1) = \frac{1}{2}$,
$f(x_2) = f(2) = 2$,
$f(x_3) = f(3) = 4\frac{1}{2}$,
$f(x_4) = f(4) = 8$.
Tada suma $S_4 = \big(f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\big)\cdot 1 = \frac{1}{2} + 2 + 4\frac{1}{2} + 8 = 15$.



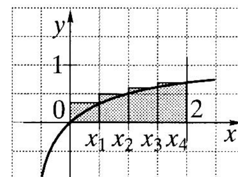
b) $\Delta x = \frac{0-(-1)}{4} = \frac{1}{4}$, $x_1 = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$, $x_2 = -1 + 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$,
$x_3 = -1 + 3 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$, $x_4 = -1 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$;
$f(x_1) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$,
$f(x_2) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$,
$f(x_3) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$,
$f(x_4) = f(0) = 0$;
$S_4 = \left(f\left(-\frac{3}{4}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right) + f(0)\right) \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + 0\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{32}$;



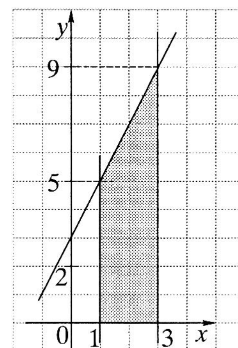
c) $\Delta x = \frac{2-(-1)}{4} = \frac{3}{4}$, $x_1 = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$, $x_2 = -1 + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$,
$x_3 = -1 + 3 \cdot \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$, $x_4 = -1 + 4 \cdot \frac{3}{4} = 2$;
$f(x_1) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{49}$,
$f(x_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{25}$,
$f(x_3) = f\left(1\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{169}$,
$f(x_4) = f(2) = \frac{1}{16}$;
$S_4 = \left(\frac{16}{49} + \frac{4}{25} + \frac{16}{169} + \frac{1}{16}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{6\,396\,627}{13\,249\,600} \approx 0{,}5$;



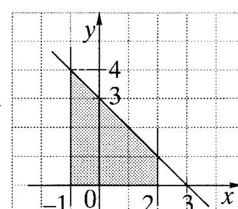
d) $\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$, $x_1 = \Delta x = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1\frac{1}{2}$, $x_4 = 2$;
$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$,
$f(x_2) = f(1) = \frac{1}{2}$,
$f(x_3) = f\left(1\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$,
$f(x_4) = f(2) = \frac{2}{3}$;
$S_4 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{63}{60} = \frac{21}{20}$.



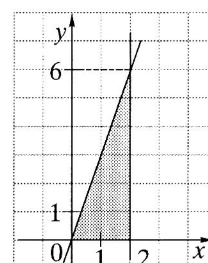
20. a) Pavaizduotoji figūra yra stačioji trapecija. Jos pagrindai yra $y(1) = 5$ ir $y(3) = 9$, o aukštinė lygi $3 - 1 = 2$, todėl plotas $S = \frac{5+9}{2} \cdot 2 = 14$.
Dalydami intervalą $[1; 3]$ į n lygių dalių, gauname $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$.
Dalijimo taškai: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = 1 + \frac{2}{n}$,
$x_2 = 1 + 2\Delta x = 1 + \frac{4}{n}, \ldots, x_n = 1 + n\Delta x = 1 + \frac{2n}{n} = 3$.
Randame funkcijos reikšmes dalijimo taškuose:
$f(x_1) = 2\left(1 + \frac{2}{n}\right) + 3 = 5 + \frac{4}{n}$,
$f(x_2) = 2\left(1 + 2 \cdot \frac{2}{n}\right) + 3 = 5 + 2 \cdot \frac{4}{n}$,
$f(x_3) = 2\left(1 + 3 \cdot \frac{2}{n}\right) + 3 = 5 + 3 \cdot \frac{4}{n}$,
.... ,
$f(x_n) = 2\left(1 + n \cdot \frac{2}{n}\right) + 3 = 5 + n \cdot \frac{4}{n}$.
Randame sumą:
$S_n = \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n)\right) \cdot \Delta x =$
$\left(5 + \frac{4}{n} + 5 + 2 \cdot \frac{4}{n} + 5 + 3 \cdot \frac{4}{n} + \cdots + 5 + n \cdot \frac{4}{n}\right) \cdot \Delta x =$
$\left(5n + \frac{4}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)\right)\frac{2}{n} = 10 + \frac{8}{n^2} \cdot \frac{(1+n)n}{2} = 10 + 4 \cdot \frac{1+n}{n}$.
$S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 10 + 4 \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1+n}{n} = 14$.



b) Turime stačiąją trapeciją. Jos pagrindai yra $f(-1) = 4$ ir $f(2) = 1$, o aukštinė lygi 3. Todėl trapecijos plotas $S = \frac{4+1}{2} \cdot 3 = 7{,}5$.
Rasime figūros plotą, remdamiesi integralo apibrėžimu: $\Delta x = \frac{3}{n}$, $x_0 = -1$,
$x_1 = -1 + \frac{3}{n}$, $x_2 = -1 + 2 \cdot \frac{3}{n}$, $x_3 = -1 + 3 \cdot \frac{3}{n}, \ldots, x_n = -1 + n \cdot \frac{3}{n} = 2$.
Apskaičiuokime funkcijos reikšmes dalijimo taškuose:
$f(x_1) = 3 - \left(-1 + \frac{3}{n}\right) = 4 - \frac{3}{n}$,
$f(x_2) = 3 - \left(-1 + 2 \cdot \frac{3}{n}\right) = 4 - 2 \cdot \frac{3}{n}$,
$f(x_3) = 3 - \left(-1 + 3 \cdot \frac{3}{n}\right) = 4 - 3 \cdot \frac{3}{n}$,
.... ,
$f(x_n) = 3 - \left(-1 + n \cdot \frac{3}{n}\right) = 4 - n \cdot \frac{3}{n}$.
Randame sumą:
$S_n = \left(4 - \frac{3}{n} + 4 - 2 \cdot \frac{3}{n} + 4 - 3 \cdot \frac{3}{n} + \cdots + 4 - n \cdot \frac{3}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} =$
$\left(4n - \frac{3}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)\right) \cdot \frac{3}{n} = 12 - \frac{9}{n^2} \cdot \frac{(1+n) \cdot n}{2} = 12 - \frac{9}{2} \cdot \frac{1+n}{n}$.
$S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 12 - \frac{9}{2} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1+n}{n} = 12 - 4{,}5 = 7{,}5$.



c) Trikampio plotas $S = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$. Apskaičiuokime plotą remdamiesi apibrėžtinio integralo apibrėžimu:
$\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{n}$, $x_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}$, $x_3 = 3 \cdot \frac{2}{n}, \ldots, x_n = n \cdot \frac{2}{n} = 2$.
Funkcijos reikšmės dalijimo taškuose:
$f(x_1) = 3 \cdot \frac{2}{n} = \frac{6}{n}$,
$f(x_2) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{n} = 2 \cdot \frac{6}{n}$,
$f(x_3) = 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{n} = 3 \cdot \frac{6}{n}$,



.........................,

$f(x_n) = 3 \cdot n \cdot \frac{2}{n} = n \cdot \frac{6}{n}$.

Randame sumą:

$S_n = \big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n)\big)\Delta x =$

$\big(\frac{6}{n} + 2 \cdot \frac{6}{n} + 3 \cdot \frac{6}{n} + \cdots + n \cdot \frac{6}{n}\big) \cdot \frac{2}{n} = \frac{12}{n^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) =$

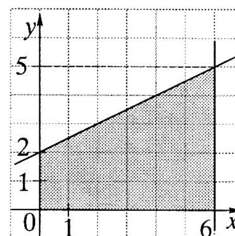
$\frac{12}{n^2} \cdot \frac{(n+1)n}{2} = 6 \cdot \frac{n+1}{n}$.

$S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 6 \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 6$.

d) Trapecijos plotas $S = \frac{2+5}{2} \cdot 6 = 21$.

Apskaičiuokime plotą ieškodami sumos S_n ribos:

$\Delta x = \frac{6}{n}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{6}{n}$, $x_2 = 2 \cdot \frac{6}{n}$, $x_3 = 3 \cdot \frac{6}{n}, \ldots, x_n = n \cdot \frac{6}{n} = 6$.



Funkcijos reikšmės dalijimo taškuose:

$f(x_1) = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{n} = 2 + \frac{3}{n}$,

$f(x_2) = 2 + \frac{1}{2} \cdot \big(2 \cdot \frac{6}{n}\big) = 2 + 2 \cdot \frac{3}{n}$,

$f(x_3) = 2 + \frac{1}{2} \cdot \big(3 \cdot \frac{6}{n}\big) = 2 + 3 \cdot \frac{3}{n}$,

.................................,

$f(x_n) = 2 + \frac{1}{2} \cdot \big(n \cdot \frac{6}{n}\big) = 2 + n \cdot \frac{3}{n}$.

Apskaičiuokime sumą S_n:

$S_n = \big(f(x_1) + (f(x_2) + (f(x_3) + \cdots + (f(x_n)\big) \cdot \Delta x =$

$\big(2 + \frac{3}{n} + 2 + 2 \cdot \frac{3}{n} + 2 + 3 \cdot \frac{3}{n} + \cdots + 2 + n \cdot \frac{3}{n}\big) \cdot \frac{6}{n} =$

$\big(2n + \frac{3}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)\big) \cdot \frac{6}{n} = 12 + \frac{18}{n^2} \cdot \frac{(1+n)n}{2} = 12 + 9 \cdot \frac{1+n}{n}$.

$S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 12 + 9 \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1+n}{n} = 21$.

9.3. Niutono ir Leibnico formulė

Štai ir priartėjome prie diferencialinio ir integralinio skaičiavimo studijų kulminacijos. Išmoksime naudotis svarbiausiu šios teorijos teiginiu.

Vienas žymus rusų matematikas, norėdamas studentams stipriau pabrėžti Niutono ir Leibnico formulės svarbą, išdėstęs ją visada užbaigdavo paskaitą, net jeigu jai skirtas laikas dar ir nebūdavo pasibaigęs.

Mokytojai patys pasirinks, kaip paaiškinti ir pagrįsti šį teiginį — naudojantis tiksliais samprotavimais ar vaizdžiais brėžiniais... Svarbu, kad būtų pabrėžta pagrindinė mintis, suvedanti ploto (apibrėžtinio integralo) skaičiavimą į pirmykštės funkcijos radimo uždavinį.

Nagrinėkime žinomos funkcijos $f(x)$ grafiku apribotos ir „besiplečiančios" kreivinės trapecijos ploto funkciją $S(x)$. Šią funkciją norėtume surasti; žinome apie ją tik tiek, kad ji yra nemažėjanti. Geometriniu brėžiniu galima pagrįsti lygybę $S'(x) = f(x)$. O dabar laikas pamąstyti. Funkcija $S(x)$ nežinoma, tačiau nustatytas jos ir žinomos funkcijos $f(x)$ ryšys: funkcija $S(x)$ yra viena iš $f(x)$ pirmykščių! Pirmykščių funkcijų ieškojimo patirties turime, taigi galime ja pasinaudoti. Panagrinėkime 1 pavyzdį. Visai netikėtai išsprendėme sudėtingą kreivinės trapecijos ploto radimo uždavinį! Galima pasvarstyti, kiek tektų triūsti, jeigu būtume skaičiavę kreivinės trapecijos plotą tiesiogiai, t. y. artindami ją iš mažų stačiakampių sudaryta figūra ir skaičiuodami ribą.

Po pirmojo pavyzdžio galima panagrinėti vieną kitą pratimą iš skyrelio 21 užduoties. Įgijus patirties galima sugrįžti prie teorijos ir užrašyti bei paaiškinti Niutono ir Leibnico formulę.

Jei liks laiko, panagrinėkime 4 skyrelio pavyzdį. Jame vėl sutinkame skaičių e, šįkart jis pasirodo nagrinėjant gerai žinomą atvirkštinio proporcingumo funkciją $f(x) = \frac{1}{x}$.

Suvokiame ir žinome:

kreivinės trapecijos ploto ir pirmykščių funkcijų radimo uždavinių ryšį;

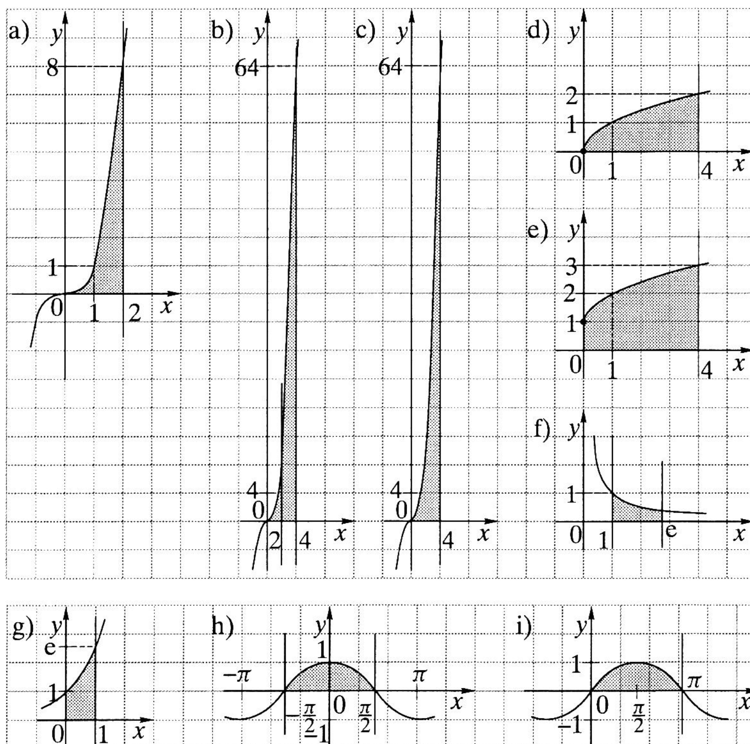
Niutono ir Leibnico formulę.

Mokame naudotis Niutono ir Leibnico formule.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Spręsdami 21–23 užduočių pratimus moksleiviai turėtų įgusti naudotis Niutono ir Leibnico formule. Pasinaudoti ja — reiškia žengti du žingsnius: 1) surasti pirmykštę funkciją; 2) apskaičiuoti pirmykštės funkcijos pokytį. 24–27 užduotys skirtos apibrėžtinio integralo taikymams.

21. a) 4; b) 60; c) 64; (*Nurodymas.* Galima skaičiuoti remiantis Niutono ir Leibnico formule arba remtis lygybe $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ir pasinaudoti punktų a) ir b) rezultatais.)
d) $5\frac{1}{3}$; e) $9\frac{1}{3}$; (*Nurodymas.* Patogu pasinaudoti punkto d) atsakymu.)
f) 1; g) e − 1; h) 2; i) 2.
Integralas išreiškia užtušuotos figūros plotą:



Nurodymas. Sprendžiant h) punktą pravartu pastebėti, kad nagrinėjama figūra yra simetriška Oy ašies atžvilgiu. Todėl duotą integralą galima pertvarkyti taip:
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$
Kita vertus, pasirodo, kad po kosinusoidės lanku esančios figūros plotas išreiškiamas labai paprastai — jis lygus 2. Visai analogiškas yra ir i) punktas.

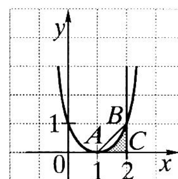
22. a) 2; b) $6\frac{1}{12}$; c) $1\frac{3}{7}$; d) 18; e) $1 + \frac{\pi}{4}$; f) $e^2(e-1)$.

23. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{15}{64}$; c) $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{16} - 1)$; d) $8\frac{2}{3}$; e) 4; f) $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$.

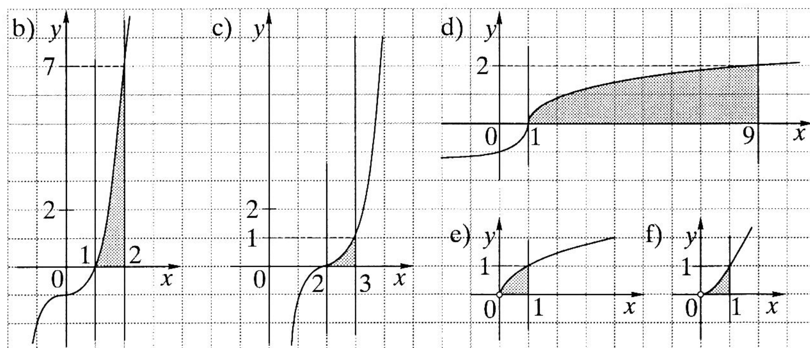
24. *Nurodymas.* Skaičiuojant įvairių figūrų plotus, pradžioje reikėtų pasidaryti brėžinį. Jis leidžia lengviau plotą užrašyti integralu — nustatyti integravimo rėžius, pointegralinę funkciją. Dar daugiau — mokinius reikia pratinti prognozuoti laukiamą rezultatą arba įvertinti gauto rezultato patikimumą. Tam reikia tiriamą figūrą palyginti su paprastesne, kurios plotą lengva apskaičiuoti.

Šių uždavinių sprendimas, tinkamai organizuojant darbą, leidžia kompleksiškai kartoti įvairių funkcijų savybes, jų grafikų ypatumus.

a) $S = \int_{1}^{2} (x-1)^2 dx = \frac{(x-1)^3}{3} \Big|_{1}^{2} = \frac{1}{3}$. Matome, kad kreivinės trapecijos plotas kiek mažesnis už stačiojo trikampio ABC plotą, kuris yra $S_{ABC} = \frac{1}{2}$.

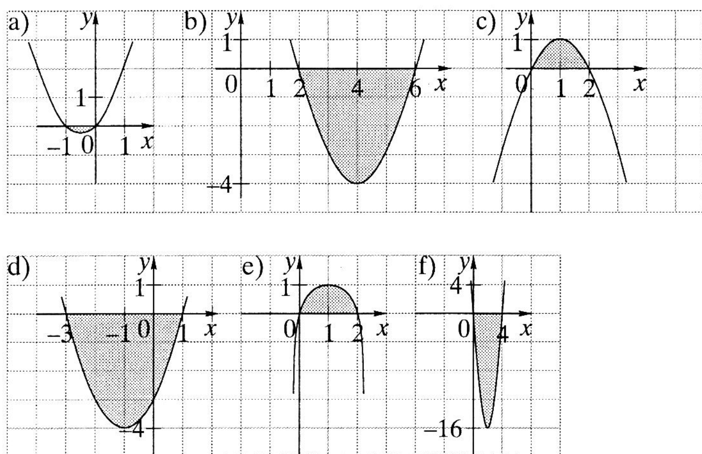


Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:



Užtušuotos figūros plotas lygus:
b) $2\frac{3}{4}$; c) $\frac{1}{4}$; d) 12; e) $\frac{3}{5}$; f) $\frac{3}{7}$.

25. Reikia apskaičiuoti užtušuotos figūros plotą:



Nurodymas. Prisiminkite, kad jei funkcija įgyja tik neteigiamas reikšmes (figūra yra po Ox ašimi), tai $\int_{a}^{b} f(x) dx = -S$.

Atsakymas. a) $\frac{1}{6}$; b) $10\frac{2}{3}$; c) $1\frac{1}{3}$; d) $10\frac{2}{3}$; e) $1\frac{3}{5}$; f) 51,2.

26. *Nurodymas.* Sakykime, kad kūnas juda ašimi Os. Jo padėtį ašyje momentu t nusako funkcija $s(t)$. Žinome, kad $s'(t) = v(t)$. Vadinasi, funkcija $s(t)$ yra funkcijos $v(t)$ pirmykštė. Todėl kūno padėties pokytį s (paprastai sakoma — nueitą kelią per laikotarpį $[t_1; t_2]$) galima užrašyti integralu:

$$s(t) = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

a) $s(t) = \int_0^{10} (2t + 2)\,dt = 120\,(\text{m})$. Šiuo atveju $a = v'(t) = 2$. Taigi kūnas juda pastoviu pagreičiu tolygiai greitėdamas.

b) $s(t) = \int_1^9 \sqrt{t}\,dt = 17\frac{1}{3}\,(\text{m})$; $a = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Matome, kad didėjant laikui pagreitis mažėja. Taigi greitis didėja, bet vis lėčiau.

c) $s(t) = \int_0^{3\ln 10} e^t\,dt = 999\,(\text{m})$; $a = v'(t) = e^t$. Pagreitis — greitai didėjanti funkcija. Ir greitis kuo toliau, tuo greičiau didėja.

Pastaba. Vadovėlyje pateiktoje sąlygoje yra korektūros klaida. Turėtų būti: c) $v(t) = e^t$, ...

d) $s(t) = \int_0^{2\pi} \sin t\,dt = 2\,(\text{m})$; $a(t) = \cos t$. Pagreitis — periodinė, ženklą keičianti funkcija; greitis, kūno padėtis — taip pat. Taip svyruoja masės judesys apie tam tikrą tašką.

27. Bakterijų skaičių rasime integruodami jų kiekio kitimo greičio funkciją:

$$\int_0^{24} (10^4 \cdot e^{1,03t})\,dt \approx 5,3 \cdot 10^{14}.$$

9.4. Figūrų plotai

Iš esmės užbaigėme integralinio skaičiavimo teorijos studijas. Liko tik panagrinėti, kur ją pritaikyti.
Pirmasis taikymas — geometrinių figūrų plotų skaičiavimams. Tai nenauja. Juk kreivinių trapecijų plotus jau skaičiavome. Šiame skyrelyje tik šiek tiek išplečiamos galimybės.
Visa skyrelio teorija „išdėstyta" 131 ir 132 puslapių brėžiniuose. Taigi kiek panagrinėjus juos galima imtis darbo: savarankiškai skaičiuoti įvairių figūrų plotus.
Kai reikia apskaičiuoti figūros, apribotos dviejų funkcijų grafikais, plotą, uždavinys skaidomas į du etapus: randamos grafikų bendrų taškų abscisės, o po to jau integruojamas funkcijų skirtumas. Ar visada būtina braižyti grafikus ir vaizduoti figūrą? Ne visada, tačiau turint tiriamo objekto vaizdą visada maloniau darbuotis.

Šiaip jau dviejų grafikų apribotos figūros plotą galima apskaičiuoti visiškai anonimiškai: suradus bendrų taškų abscises x_1 ir x_2 ($x_1 < x_2$) galima tiesiog skaičiuoti integralą

$$\int_{x_1}^{x_2} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Absoliutusis šio integralo didumas ir bus ieškomas plotas.

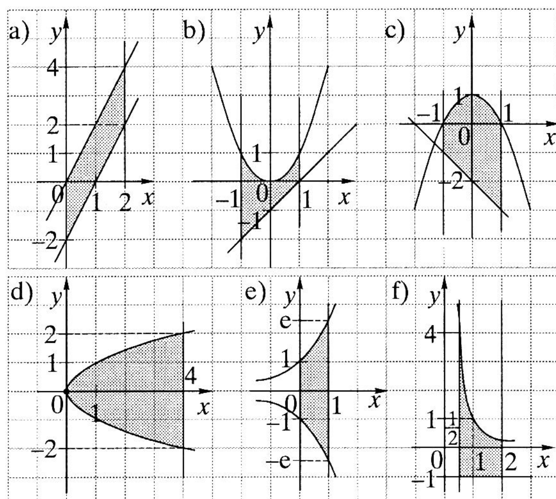
Suvokiame ir žinome dviejų funkcijų grafikais apribotos figūros ploto skaičiavimo metodą.

Mokame:
vaizduoti grafikais apribotas figūras;
taikyti integralus jų plotams skaičiuoti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

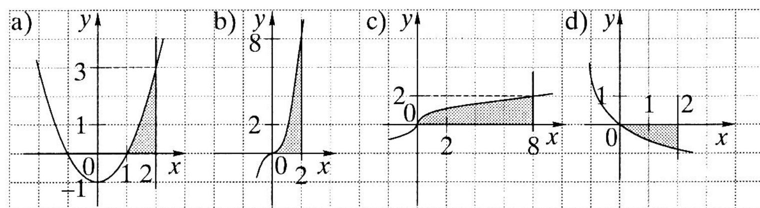
Svarbiausi yra 28–30 užduočių pratimai. Visų spręsti nereikia, tačiau kelis pasirinktus reikia atlikti „sąmoningai" ir iki galo.

28. Pavaizduokime figūrą, kurios plotą reikia rasti:



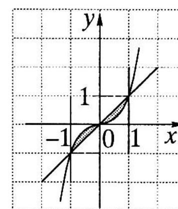
Šios figūros plotas lygus:
a) 4; b) $2\frac{2}{3}$; c) $5\frac{1}{3}$; d) $10\frac{2}{3}$; e) $2(\mathrm{e}-1) \approx 3{,}4$; f) 3.
Nurodymas. Skaičiuojant d) ir e) punktuose pavaizduotų figūrų plotus, pravartu pastebėti, kad figūros yra simetriškos Ox ašies atžvilgiu. Todėl šių figūrų plotus galima skaičiuoti ir taip: apskaičiuoti plotą figūros, kurią riboja Ox ašis, virš Ox ašies (po Ox ašimi) esanti kreivė bei nurodyta tiesė, o po to šį plotą padvigubinti. Beje, taip skaičiuoti plotus galima visų figūrų, turinčių simetrijos ašis (nebūtinai Ox ar Oy ašis), pavyzdžiui, 21h,i, 24a, 25a-f. Tik vienas iš rėžių bus pati simetrijos ašis.

29. Pavaizduokime figūrą, kurios plotą reikia rasti:

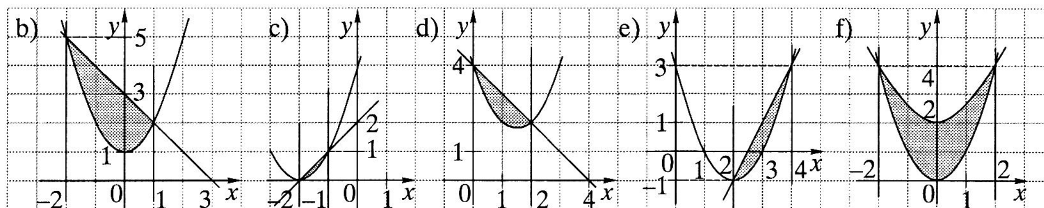


Užtušuotos figūros plotas lygus:
a) $1\frac{1}{3}$; b) 4; c) 12; d) $\mathrm{e}^{-2}+1 \approx 1{,}1$.

30. a) Randame funkcijų $f(x) = x$ ir $g(x) = x^3$ grafikų susikirtimo taškus: $\begin{cases} y = x, \\ y = x^3 \end{cases} \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Tada $y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$. (Žinoma, tą galima pastebėti ir iš grafikų.) Abi užtušuotos figūros dalys simetriškos koordinačių pradžios taško atžvilgiu, todėl yra lygios. Taigi: $S = 2\int\limits_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{2}$.

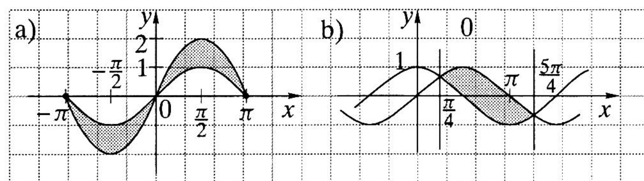


Panašiai sprendžiami ir kiti punktai:



Užtušuotos figūros plotas lygus:
b) $4\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $1\frac{1}{3}$; e) $1\frac{1}{3}$; f) $5\frac{1}{3}$.

31. Nubraižykime koordinačių plokštumoje figūrą, kurios plotą reikia rasti:

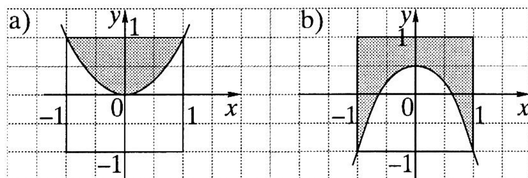


Taigi:

a) $S = 2\int\limits_0^{\pi} (2\sin x - \sin x)\,dx = -2\cos x\big|_0^{\pi} = 4$. (*Nurodymas.* Abi funkcijos nelyginės, todėl abi figūros dalys yra lygios.)

b) $S = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = (-\cos x - \sin x)\big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$.

32. Nubraižykime koordinačių plokštumoje kvadratą $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ ir funkcijos $f(x)$ grafiką:



Raskime dalių, į kurias funkcijos $f(x)$ grafikas dalija kvadratą, plotus:

a) $S_{\text{užtušuotos}} = \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 1\frac{1}{3}$;

(arba: $S_{\text{užtušuotos}} = 2\int\limits_0^1 (1 - x^2)\,dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1\frac{1}{3}$).

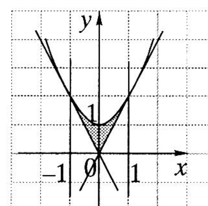
Neužtušuotos figūros plotą paprasčiausia skaičiuoti taip: iš kvadrato, kurio kraštinės ilgis lygus 2, ploto atimti užtušuotos figūros plotą, t. y. $S = 2^2 - 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Analogiškai dalių plotus randame ir b) punkte:

b) $S_{\text{užtušuotos}} = S_{\text{neužtušuotos}} = 2$.

33. Užrašykime lygtis funkcijos $y = x^2 + 1$ grafiko liestinių, nubrėžtų taškuose $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$: $y_1 = -2x$ ir $y_2 = 2x$ ir pavaizduokime figūrą, kurios plotą reikia rasti (žr. paraštėje).

Tada $S = 2\int\limits_0^1 (x^2 + 1 - 2x)\,dx = \frac{2}{3}$.



9.5. Sukinių tūriai

Visi „apvalieji“ kūnai, kuriuos nagrinėjame mokykliniame matematikos kurse — ritiniai, kūgiai, rutuliai — yra sukiniai, t. y. kūnai, kuriuos galima gauti sukant plokščias figūras apie tam tikrą ašį. Tai paprasčiausieji iš visų sukinių. Sukinių tūrio radimo uždavinys pradedamas nagrinėti jau žinomu būdu: sudėtingas kūnas keičiamas kitu kūnu, kuris sudaromas iš mažų ritinių. Tai — kelias integralo link. Samprotaudami naudojamės ritinio tūrio formule. Šiai formulei gauti irgi tenka pasinaudoti riba: ritinio tūris yra įbrėžtų į jį taisyklingų prizmių tūrių riba. Taigi sukinio tūrio formulė

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

yra tiesiog grūste prigrūsta ribų. Tačiau taikant ją mums ribos visai nerūpi. Vos kelios eilutės ir sudėtingų kūnų tūrių formulės ant mūsų stalo!

Suvokiame, įsivaizduojame, žinome:

kaip gaunami sukiniai;

kaip išvedama jų tūrio formulė.

Mokame:

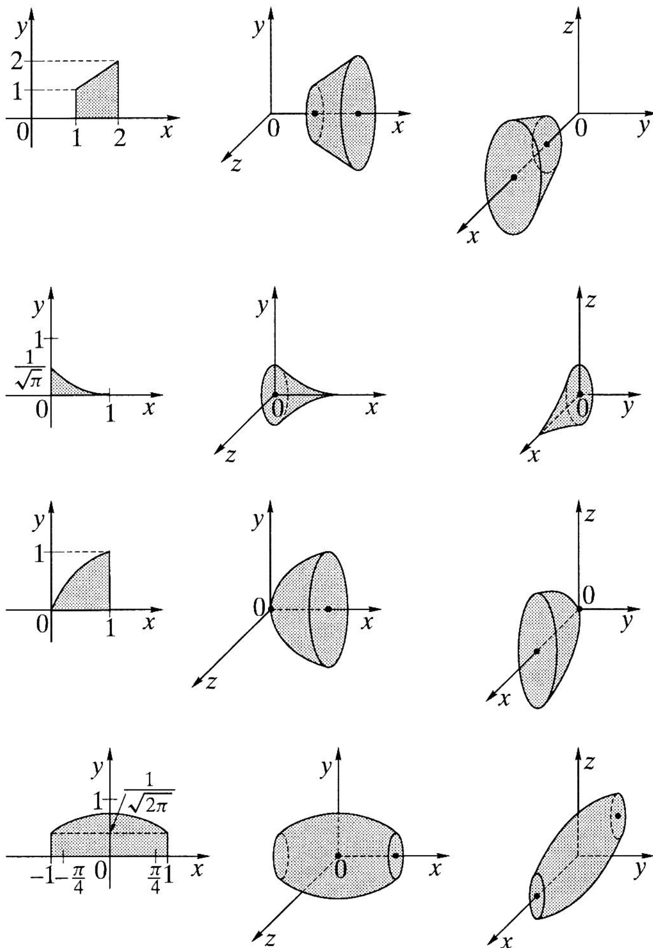
schemiškai pavaizduoti sukinius;

taikant integralus apskaičiuoti jų tūrius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pasirinktinai reikėtų išspręsti po keletą 35 ir 36 užduoties pratimų. 35 užduoties kūnai gaunami sukant kreivines trapecijas, 36 užduoties — kiek sudėtingesnes figūras.

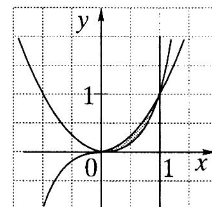
34. Norint pavaizduoti norimą kūną, reikia žinoti, kokios funkcijos grafiku yra apribota kreivinė trapecija (rėžiai yra duoti). Taigi ta funkcija yra:
a) $f(x) = x$; b) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{\pi}}$; c) $f(x) = \sqrt{x}$; d) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$.
Dabar galime pavaizduoti patį kūną:



Pastabos. 1. Pateikti kūnai nėra vieninteliai. Jei jų viduje būtų ertmės, jų forma gali gerokai skirtis nuo pavaizduotų.
2. Erdviniai vaizdai pateikti dvejopai išdėsčius ašis x, y, z. Nors pirmame variante ašių išdėstymas nestandartinis, bet jis artimesnis kreivinės trapecijos padėčiai plokštumoje xOy.

35. a) $\frac{2\pi}{5}$; b) $\frac{206\pi}{15}$; c) 8π; d) π; e) 2π; f) $\frac{\pi^2}{2}$.

36. a) Raskime funkcijų $y = x^2$ ir $y = x^3$ grafikų susikirtimo taškus. Sprendžiame lygtį $x^2 = x^3 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$. Tada $y_1 = 0,\ y_2 = 1$. Taigi grafikai kertasi taškuose $(0; 0)$ ir $(1; 1)$.



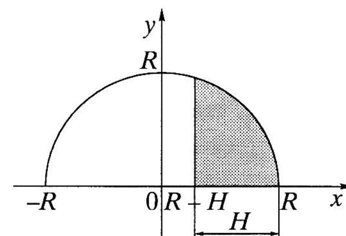
Galime laikyti, kad apie Ox ašį sukame figūrą, apribotą kreivėmis $y = x^2$, $y = x^3$ ir tiesėmis $x = 0$, $x = 1$.

Tada sukinio tūris $V = \pi \int\limits_0^1 (x^2)^2\,dx - \pi \int\limits_0^1 (x^3)^2\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{35}$.

Analogiškai skaičiuojame ir kitais atvejais:

b) $\frac{8\pi}{21}$; c) $14{,}4\pi$; d) $\frac{4\pi}{5}$.

37. Rutulį gauname sukdami skritulio pusę, apribotą kreivėmis $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ir $y = 0$. Kai nuopjovos aukštinė H, reikės integruoti nuo $x_1 = R-H$ iki $x_2 = R$.



$$V = \pi \int\limits_{R-H}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2\,dx = \pi \int\limits_{R-H}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi(R^2 x - \tfrac{1}{3}x^3)\Big|_{R-H}^{R} =$$

$$\pi\left(R^3 - \tfrac{1}{3}R^3 - (R^2(R-H) - \tfrac{1}{3}(R-H)^3)\right) =$$

$$\pi\left(\tfrac{2}{3}R^3 - R^3 + R^2H + \tfrac{1}{3}(R^3 - 3R^2H + 3RH^2 - H^3)\right) =$$

$$\pi(-\tfrac{1}{3}R^3 + R^2H + \tfrac{1}{3}R^3 - R^2H + RH^2 - \tfrac{1}{3}H^3) =$$

$$\pi\left(RH^2 - \tfrac{H^3}{3}\right) = \pi H^2\left(R - \tfrac{H}{3}\right).$$

9.6. Piramidės tūris

Šiame skyrelyje įrodoma formulė, kuria moksleiviai naudojasi jau žemesnėse klasėse — piramidės tūrio formulė. Tačiau tik dabar galima ją tinkamai pagrįsti. Pasirodo, kad ir tam būtinos ribos (jos formulės įrodyme dalyvauja kaip integralai).

Neretai dvi matematinės teorijos yra plėtojamos analogiškai, tačiau tam tikras reiškinys atveria esminius jų skirtumus. Pavyzdžiui, daugelis daugiakampių ploto teorijos ir briaunainių tūrio teorijos teiginių ir samprotavimų yra panašūs. Tačiau daugiakampių ploto teorijai (jeigu apsiribosime plotų lyginimu, o ne reiškimu formulėmis) ribų neprisireikia, o briaunainių tūrių teorija be jų neįmanoma.

Šį skyrelį nagrinėti nebūtina. Tačiau jis turi būti mokykliniame matematikos vadovėlyje. Tiems, kam rūpi žinoti, kodėl yra teisingos visuotinai pripažįstamos tiesos.

10. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

Pastaba. Vadovėlyje pateikti neteisingi atsakymai šių uždavinių: 2, 22, 24, 32.

1. a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x^2 - 2x)\,dx = 3\int x^2\,dx - 2\int x\,dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} = x^3 - x^2 + C$. Kadangi $F(1) = 7$, tai $1^3 - 1^2 + C = 7$ ir $C = 7$. Taigi $F(x) = x^3 - x^2 + 7$.

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:

b) $F(x) = x + \ln x + 2$; (*Pastaba.* Pirmykštę patogu rasti pertvarkius funkciją $f(x)$: $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$.)

c) $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - \cos 2x) + 1$; d) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + x + 10\frac{1}{2}$.

2. Liestinės krypties koeficientas $k = f'(x_0)$, todėl $f'(x) = \sqrt{x+2}$, o pirmykštės funkcijos užrašomos $\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$. Reikalaudami, kad kreivė eitų per tašką $M(2; 4)$, gauname lygtį: $\frac{2}{3}(2+2)^{\frac{3}{2}} + C = 4$, $c = -1\frac{1}{3}$.
Taigi $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 1\frac{1}{3}$.

3. a) $F(x) = \frac{1}{14}(2x+3)^7 + C$; b) $F(x) = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + C$;

c) $F(x) = -\frac{3}{5}(3-x)^{\frac{5}{3}} + C$; d) $F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x-4| + C$;

e) $F(x) = -\frac{1}{(2x-5)^2} + C$; f) $F(x) = \frac{3^{3x}}{3\ln 3} + C$;

g) $F(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + C$; h) $F(x) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{ctg}(\pi x) + C$.

4. a) $\frac{3}{5}x^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$; b) $2x\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{7}x^2\right) + C$;

c) $2\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right) + C$; d) $\frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + \ln|x| + C$;

e) $x - 6\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 3\ln x + C$, $x > 0$; f) $-\frac{16}{x} + \frac{16}{\sqrt{x}} + \ln x + C$, $x > 0$.

5. a) $-\frac{1}{4}e^{-4x} + 2x + \frac{1}{4}e^{4x} + C$; b) $\frac{3^{2x}}{2\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 6} + C$;

c) $e^x + e^{-x} + C$; d) $\frac{8^x}{\ln 8} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$.

6. a) $\int \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$;

b) $\int (1 - 8\sin^2 x\cos^2 x)\,dx = \int (1 - 2\sin^2 2x)\,dx = \int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin(4x) + C$;

c) $\int \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$;

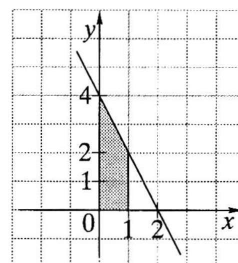
d) $\int \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x}\,dx = 2\int \cos 2x\,dx = \sin 2x + C$.

7. Nuvažiuoto kelio funkcija $s(t)$ yra greičio funkcijos $v(t)$ pirmykštė funkcija. Taigi $s(t) = \int v(t)\,dt = \int (t^2 + 2t)\,dt = \frac{t^3}{3} + t^2 + C$. Jei pradžioje kūnas buvo padėtyje $s = 0$, tai $s(0) = 0$ ir $C = 0$. Taigi judėjimo dėsnis $s(t) = \frac{t^3}{3} + t^2$.
a) $s(3) = 18$ m; b) $s(6) = 108$ m.

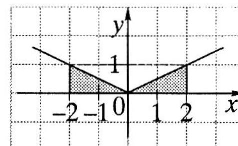
8. Randame $s(t)$ — greičio $v(t)$ pirmykštę funkciją:
$s(t) = \frac{2^{1-\frac{t}{4}}}{\ln 2}\cdot(-4) + C = \frac{-8\cdot 2^{-\frac{t}{4}}}{\ln 2} + C$.
Iš sąlygos $s(0) = 0$ turime: $\frac{-8}{\ln 2} + C = 0$, $C = \frac{8}{\ln 2}$.
Tuomet $s(t) = \frac{8}{\ln 2} - \frac{8\cdot 2^{-\frac{t}{4}}}{\ln 2} = \frac{8}{\ln 2}\left(1 - 2^{-\frac{t}{4}}\right)$.
a) $s(16) = \frac{8}{\ln 2}(1 - 2^{-4}) = \frac{15}{2\ln 2} \approx 10{,}82$ (m);
b) $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{8}{\ln 2}\left(1 - 2^{-\frac{t}{4}}\right) = \frac{8}{\ln 2} \approx 11{,}54$ (m).

9. Randame skilimo greičio pirmykštes:
$m(t) = -km_0\cdot e^{-kt}\cdot\left(-\frac{1}{k}\right) + C = m_0e^{-kt} + C$.
Iš sąlygos $m(0) = m_0$ randame: $m(0) = m_0\cdot e^0 + C$, $C = 0$.
Taigi nesuskilusios radioaktyvios medžiagos kiekis $m(t) = m_0e^{-kt}$.
a) Lygindami $m'(t)$ ir $m(t)$ matome, kad teisinga lygybė: $m'(t) = -km(t)$, kuri ir patvirtina radioaktyvios medžiagos skilimo dėsnį.
b) Iš lygybės $\frac{m(t)}{m_0} = e^{-kt}$ radžiui gauname: $\frac{m(200)}{m_0} = e^{-\frac{200\cdot\ln 2}{1590}} \approx 0{,}916$.
c) Iš lygties $\frac{1}{100} = e^{-kt}$, $-kt = \ln\frac{1}{100}$,
$t = \frac{1}{k}\cdot\ln 100 = \frac{2}{k}\ln 10 = \frac{2}{\ln 2}\cdot T_{\frac{1}{2}}\cdot\ln 10 = \frac{1}{\lg 2}\cdot 2T_{\frac{1}{2}}$.
Jodui ^{131}I šis laikas $t \approx \frac{2\cdot 8{,}4}{\lg 2} \approx 55{,}8$ paros.
Ceziui ^{137}Cs: $t \approx \frac{2\cdot 2{,}8}{\lg 2} \approx 18{,}6$ metų.
Stronciui ^{90}Sr: $t \approx \frac{2\cdot 9}{\lg 2} \approx 59{,}8$ min.

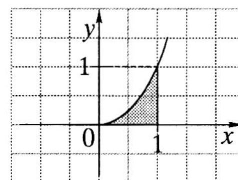
10. a) Dalydami intervalą [0; 1] į n lygių dalių, gauname $\Delta x = \frac{1}{n}$.
Dalijimo taškai: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1$.
Funkcijos reikšmės dalijimo taškuose:
$f(x_1) = 4 - 2 \cdot \frac{1}{n} = 4 - \frac{2}{n}$,
$f(x_2) = 4 - 2 \cdot \frac{2}{n}$,
$f(x_3) = 4 - 2 \cdot \frac{3}{n} = 4 - 3 \cdot \frac{2}{n}$,
..............................,
$f(x_n) = 4 - 2 \cdot \frac{n}{n} = 4 - n \cdot \frac{2}{n}$.
Suma $S_n = \big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n)\big) \cdot \Delta x =$
$\big(4 - \frac{2}{n} + 4 - 2 \cdot \frac{2}{n} + 4 - 3 \cdot \frac{2}{n} + \cdots + 4 - n \cdot \frac{2}{n}\big) \cdot \frac{1}{n} =$
$\big(4n - \frac{2}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)\big) \cdot \frac{1}{n} = 4 - \frac{2}{n^2} \cdot \frac{(1+n)n}{2} = 4 - \frac{1+n}{n} = 3 - \frac{1}{n}$.
$S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(3 - \frac{1}{n}\big) = 3$.
Gautą rezultatą nesunku patikrinti, skaičiuojant trapecijos plotą:
$S = \frac{2+4}{2} \cdot 1 = 3$.



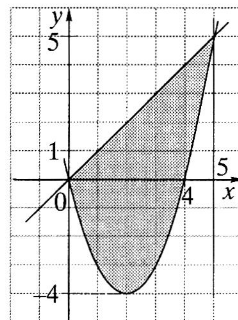
b) Kadangi figūra simetriška Oy ašies atžvilgiu, tai pakanka skaičiuoti vienos dalies (pvz., dešiniosios) plotą.
Intervalą (0; 2) dalydami į n lygių dalių, gauname $\Delta x = \frac{2}{n}$.
Dalijimo taškai: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{n}$, $x_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}, \ldots, x_n = n \cdot \frac{2}{n} = 2$.
Funkcijos reikšmės dalijimo taškuose:
$f(x_1) = \frac{1}{2} \cdot \big|\frac{2}{n}\big| = \frac{1}{n}$,
$f(x_2) = \frac{1}{2} \cdot \big|2 \cdot \frac{2}{n}\big| = \frac{2}{n}$,
..........................,
$f(x_n) = \frac{1}{2} \cdot \big|n \cdot \frac{2}{n}\big| = \frac{n}{n}$.
Suma: $S_n = \big(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\big) \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) =$
$\frac{(n+1)\cdot n \cdot 2}{n^2 \cdot 2} = \big(1 + \frac{1}{n}\big)$. Aišku, kad $S_n \to 1$, kai $n \to +\infty$. Visas plotas $S = 2$.



c) *Nurodymas.* Plotų skaičiavimas tokiu būdu dažnai pareikalauja išradingumo — mokėti sumuoti įvairias sumas, netolygiai išdėstyti dalijimo taškus ir pan. Vadovėlyje pateiktas vienintelis kiek sudėtingesnis uždavinys. Nurodyme pateikta sumavimo formulė nesunkiai įrodoma matematinės indukcijos metodu.
Intervalą [0; 1] dalydami į n lygių dalių, gauname $\Delta x = \frac{1}{n}$.
Dalijimo taškai $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
Suma: $S_n = \big(\frac{1}{n^2} + \big(\frac{2}{n}\big)^2 + \big(\frac{3}{n}\big)^2 + \cdots + \big(\frac{n}{n}\big)^2\big) \cdot \frac{1}{n} =$
$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{6} \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}\big) =$
$\frac{1}{6} \lim\limits_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{1}{n}\big) \cdot \big(2 + \frac{1}{n}\big) = \frac{1}{3}$.
Aišku, kad $S = \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.



11. a) Randame funkcijų $f(x) = x^2 - 4x$ ir $g(x) = x$ grafikų susikirtimo taškus: $x^2 - 4x = x$, $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. Tada $y_1 = 0$, $y_2 = 5$. Taigi grafikai kertasi taškuose (0; 0) ir (5; 5).
Galime laikyti, kad figūrą apriboja funkcijų $f(x) = x^2 - 4x$ ir $g(x) = x$ grafikai bei tiesės $x = 0$ ir $x = 5$. Šios figūros plotą skaičiuojame integruodami:
$S = \int\limits_0^5 \big(x - (x^2 - 4x)\big)\,dx = \int\limits_0^5 (5x - x^2)\,dx = \big(5 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\big)\Big|_0^5 = 20\frac{5}{6}$.



Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:

b) $S = \int\limits_{-4}^{1} \big(x + 4 - (x^2 + 4x)\big)\,dx = \big(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\big)\Big|_{-4}^{1} = 20\frac{5}{6}$;

c) $S = \int\limits_{-2}^{3} \big(2x - x^2 - (x - 6)\big)\,dx = \big(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\big)\Big|_{-2}^{3} = 20\frac{5}{6}$;

d) *Pastaba.* Šiame pratime integravimas nėra sudėtingas, tačiau yra proga „pasidarbuoti“ su šaknimis.
$S = \int\limits_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}} \big(-x^2 - x - (x - 4)\big)\,dx = \big(4x - x^2 - \frac{x^3}{3}\big)\Big|_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{3}$;

e) $S = \int\limits_{-2}^{2} \big(8 + 2x - x^2 - (2x + 4)\big)\,dx = \big(4x - \frac{x^3}{3}\big)\Big|_{-2}^{2} = 10\frac{2}{3}$;

f) $S = \int\limits_{-1}^{3} (7 - 2x - (x-2)^2)\,dx = \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3} = 10\frac{2}{3}$;

g) $S = \int\limits_{0}^{2} (-(x^3 - 4x))\,dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2} = 4$;

h) $S = \int\limits_{2}^{4} (3(x-2)(x-4)^2)\,dx = 3\int\limits_{2}^{4} (x^3 - 10x^2 + 32x - 32)\,dx =$
$3\left(\frac{x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + 16x^2 - 32x\right)\Big|_{2}^{4} = 4.$

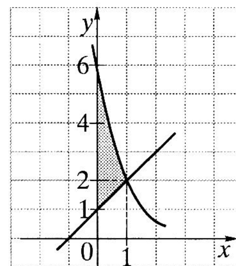
12. a) $S = \int\limits_{1}^{9} (\sqrt{x} - 1)\,dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x\right)\Big|_{1}^{9} = 9\frac{1}{3}$;

b) $S = \int\limits_{0}^{1} (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{6}$;

c) $S = \int\limits_{1}^{5} \left(6 - x - \frac{5}{x}\right)dx = \left(6x - \frac{x^2}{5} - 5\ln x\right)\Big|_{1}^{5} = 12 - 5\ln 5$;

d) $S = \int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}$;

e) *Pastaba.* Ieškant kreivių $y = 6 \cdot 3^{-x}$ ir $y = x + 1$ grafikų susikirtimo taškų, reikia spręsti lygtį $6 \cdot 3^{-x} = x + 1$. (Ji sprendžiama taip: kadangi funkcija $6 \cdot 3^{-x}$ mažėja, o funkcija $x + 1$ didėja, tai jų grafikai turi *daugiausiai* vieną susikirtimo tašką. Bet matome, kad $x = 1$ tenkina lygtį, taigi tai vienintelis sprendinys.) Tačiau braižant funkcijų grafikus galima įžiūrėti vienintelį sprendinį $x = 1$. Taigi



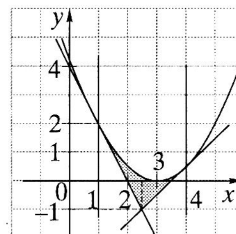
$S = \int\limits_{0}^{1} \left(6 \cdot 3^{-x} - (x+1)\right)dx = \left(-6 \cdot \frac{3^{-x}}{\ln 3} - \frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{4}{\ln 3} - 1\frac{1}{2}$;

f) $S = \int\limits_{0}^{1} (e^x - e^{-x})\,dx = (e^x + e^{-x})\Big|_{0}^{1} = e + \frac{1}{e} - 2.$

13. a) $S = \int\limits_{0}^{4} \left(x^2 + 8 - (2x^2 - 4x + 8)\right)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{4} = 10\frac{2}{3}$;

b) $S = \int\limits_{-1}^{5} \left(x^2 - 2x - 2 - (2x^2 - 6x - 7)\right)dx = \left(5x + 2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{5} = 36.$

14. Užrašykime lygtis funkcijos $y = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$ grafiko liestinių, nubrėžtų taškuose $x_1 = 1$ ir $x_2 = 4$. Liestinės lygtis: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$. Kai $x_0 = 1$, tai $f(1) = 2$, $f'(1) = -2$ ir liestinės lygtis $y = -2x + 4$; kai $x_0 = 4$, tai $f(4) = 0{,}5$, $f'(4) = 1$ ir liestinės lygtis $y = x - 3{,}5$.
Nubraižykime koordinačių plokštumoje kreivę $y = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$ ir jos liestines $y = -2x + 4$ ir $y = x - 3{,}5$ (žr. brėžinį paraštėje).
Reikia rasti užtušuotos figūros plotą, kuris lygus dviejų plotų sumai, t. y.



$S = \int\limits_{1}^{a} \left(0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5 - (-2x + 4)\right)dx + \int\limits_{a}^{4} \left(0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5 - (x - 3{,}5)\right)dx,$
kur a — tiesių $y = -2x + 4$ ir $y = x - 3{,}5$ susikirtimo taško abscisė; raskime ją: $-2x + 4 = x - 3{,}5 \Rightarrow x = 2{,}5$.
Taigi $S = \int\limits_{1}^{2,5} \left(0{,}5x^2 - x - 0{,}5\right)dx + \int\limits_{2,5}^{4} \left(0{,}5x^2 - 4x + 8\right)dx = 1{,}125.$

15. $V_{\text{rut}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$;
$V_{\text{sukinio}} = \pi \int\limits_{0}^{4} (x^2 - 4x)^2\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 - 16 \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{4} = 34\frac{2}{15}\pi.$
Taigi rutulio tūris didesnis.

16. a) $V = \pi \int\limits_{0}^{1} (\sqrt[3]{x})^2\,dx = \pi \cdot \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\Big|_{0}^{1} = \frac{3}{5}\pi$;

b) $V = \pi \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi \cdot \frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = 1{,}5\pi$;

c) $V = \pi \int\limits_{0}^{\ln 10} (e^{-x})^2\,dx = -\frac{\pi}{2} \cdot e^{-2x}\Big|_{0}^{\ln 10} = \frac{99}{200}\pi$;

d) *Nurodymas.* Funkcija $y = \frac{1}{\cos x}$ yra lyginė, todėl patogu integruoti tik intervale $[0; \frac{\pi}{4}]$ ir integralą padvigubinti.

$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 dx = 2\pi \cdot \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi.$

17. Kiekvieną dieną iš garažo išvažiuoja $115 - 115 \cdot \frac{1}{5} = 92$ automobiliai. Taigi kiekvieną dieną turi dirbti 92 vairuotojai. Per mėnesį susidaro $92 \cdot 30 = 2760$ darbadienių. Jeigu visi vairuotojai dirba per mėnesį po vienodą skaičių dienų, tai kiekvienam jų tenka $\frac{2760}{120} = 23$ darbo dienos, o 7 dienos lieka laisvos.
Arba: Kiekvieną dieną garaže lieka $115 : 5 = 23$ automobiliai. Vadinasi, kiekvieną dieną nedirba $120 - (115 - 23) = 28$ vairuotojai, o per mėnesį — $30 \cdot 28 = 840$ vairuotojų. Kadangi įmonėje dirba 120 vairuotojų, vadinasi, kiekvienas gali turėti per mėnesį $840 : 120 = 7$ laisvas dienas.

18. Pažymėkime v_1 baliono tūrį po 1 sekundės, v_2 — po antros sekundės ir t. t. Per pirmą sekundę tūris padidėja nuo $0\,\ell$ iki $v_1 = 3\,\ell$, taigi padidėjimas yra $3\,\ell$. Per antrą sekundę tūris padidėja dydžiu $\frac{9}{10} \cdot 3$, per trečią — dydžiu $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot 3$, apskritai — per m-tąją sekundę tūris padidėja $\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} \cdot 3$. Taigi

$v_1 = 3,\ v_2 - v_1 = \frac{9}{10} \cdot 3,\ v_3 - v_2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot 3, \ldots, v_m - v_{m-1} = \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} \cdot 3.$

Sudėję lygybių kairiąsias ir dešiniąsias puses gausime:

$v_1 + (v_2 - v_1) + \cdots + (v_m - v_{m-1}) = 3 + 3 \cdot \frac{9}{10} + 3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots + 3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1},$

$v_m = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^m}{1 - \frac{9}{10}} = 30\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^m\right).$

Kad balionas sprogtų, jo tūris turi padidėti iki $\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$ litrų.
Tačiau $v_m < 30\,\ell$, taigi balionas nesprogs net jeigu užmiršime išjungti pučiantį įrenginį.

19. a) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(1 + \sqrt{2})^2 \cdot (3 - 2\sqrt{2})} =$
$\sqrt[6]{(3 + 2\sqrt{2}) \cdot (3 - 2\sqrt{2})} = \sqrt[6]{9 - 8} = 1.$

b) $\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}\right) =$
$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{125} = 2 + 5 = 7.$
Žinoma, geriau remtis greitosios daugybos formulėmis:
$((\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{5})^2)(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}) = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 7.$
Tą patį sprendimą kai kam gal bus paprasčiau užrašyti taip: pažymėkime $\sqrt[3]{2} = a$, $\sqrt[3]{5} = b$. Tada kairiąją lygybės pusę galime perrašyti taip:
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 = 2 + 5 = 7.$

20. Kadangi skaičiai x, y, z sudaro aritmetinę progresiją, tai $y - x = z - y$, t. y. $2y - z = x$. Pakelkime abi puses kvadratu: $(2y - z)^2 = x^2$, $4y^2 - 4yz + z^2 = x^2$. Prie abiejų šios lygybės pusių pridėkime po $8yz$:
$4y^2 + 4yz + z^2 = x^2 + 8yz \Rightarrow (2y + z)^2 = x^2 + 8yz.$

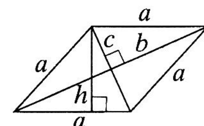
21. a) $|2x + 5| > 9$, $2x + 5 < -9 \Rightarrow x < -7$; $2x + 5 > 9 \Rightarrow x > 2$.
Taigi $x < -7$ ir $x > 2$;

b) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geqslant 1$, $\frac{x+2}{x-1} \leqslant -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leqslant x < 1$; $\frac{x+2}{x-1} \geqslant 1 \Rightarrow x > 1$.
Taigi $-\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ ir $x > 1$.

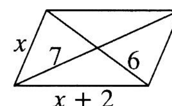
22. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{32-2x} \Rightarrow x^2 + 2x < 32 - 2x \Rightarrow$
$-8 < x < 4$;

b) $3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[3]{27^{2x-1}} \Rightarrow 3^{\frac{6x-3}{x}} < 3^{2x-1} \Rightarrow \frac{6x-3}{x} < 2x - 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$ ir $x > 3$.

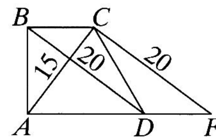
23. Sakykime, kad rombo kraštinės ilgis yra a, o jo įstrižainių ilgiai yra b ir c. Kadangi $a = \sqrt{bc}$, tai $bc = a^2$. Rombo plotas $S = ah = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow$ $h = \frac{1}{2}a$. Vadinasi, prieš aukštinę esantis rombo smailusis kampas lygus 30°. Tada bukasis rombo kampas yra $180° - 30° = 150°$.
Atsakymas. 30° ir 150°.



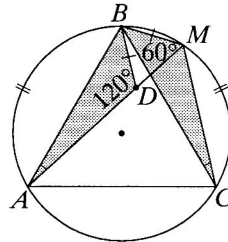
24. Remdamiesi lygiagretainio savybe, sudarome lygtį:
$2\left(x^2 + (x + 2)^2\right) = 7^2 + 6^2 \Rightarrow x_1 = -5{,}5$ (netinka), $x_2 = 3{,}5$ dm.
Tada $x + 2 = 5{,}5$ ir $P = 2(3{,}5 + 5{,}5) = 18$ (dm).
Atsakymas. 18 dm.



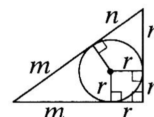
25. Tegu $AC = 15\,\text{cm}$ ir $BD = 20\,\text{cm}$. Kraštinės AD tęsinyje atidėkime atkarpą DF tokią, kad $DF = BC$. Tada, remiantis trapecijos vidurinės linijos savybe, $AF = 12{,}5 \cdot 2 = 25\,(\text{cm})$. Pagal atvirkštinę Pitagoro teoremą trikampis ACF yra status, nes $25^2 = 15^2 + 20^2$. Tada $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150\,(\text{cm}^2)$. Kadangi $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CDF}$ (lygūs pagrindai ir aukštinės), vadinasi, $S_{ABCD} = S_{\triangle ACF} = 150\,\text{cm}^2$.
Atsakymas. $150\,\text{cm}^2$.



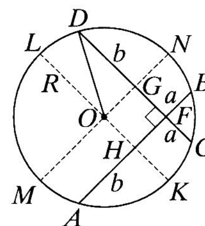
26. Atkarpoje MA atidėkime $MD = MB$. Tada $\angle BMA = 60°$, nes $\smile AB = 120°$. Vadinasi, trikampis BDM yra lygiakraštis. Taigi $BM = BD$ ir $AB = BC$. Jei įrodytume, kad $\angle ABD = \angle CBM$, tai $\triangle ABD$ būtų lygus $\triangle CBM$.
$\angle BAM = \angle BCM$ (įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką BM);
$\angle ADB = 120°$, nes jam gretutinis kampas lygus $60°$;
$\angle BMC = 120°$, nes remiasi į $240°$ lanką.
Vadinasi, $\angle ABD = \angle CBM$. Taigi $\triangle ABD = \triangle CBM$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Vadinasi, $AD = MC$.
Taigi $AD + DM = MB + MC$ arba $MA = MB + MC$.



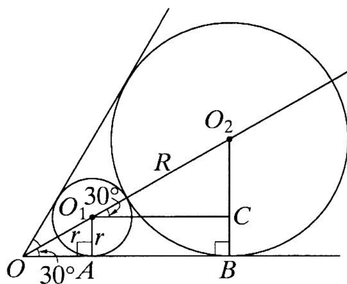
27. $(m+n)^2 = (m+r)^2 + (n+r)^2 \Rightarrow mn = r^2 + mr + nr$;
$S_\triangle = \frac{(m+r)(n+r)}{2} = \frac{mn+nr+mr+r^2}{2} = \frac{mn+mn}{2} = mn$.



28. Tegu $CF = FB = a$, $AF = FD = b$. Nubrėžkime apskritimo skersmenis MN ir KL, lygiagrečius duotoms stygoms.
Skritulio spindulį $OD = R$ išreikškime atkarpomis a ir b:
$CG = GD = \frac{1}{2}(a+b)$, $AH = HB = \frac{1}{2}(a+b)$,
$OG = HF = \frac{1}{2}(a+b) - a = \frac{1}{2}(b-a)$.
Iš stačiojo $\triangle GOD$: $OD^2 = OG^2 + GD^2$, $R^2 = \left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab) + \frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab) = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.
Tada $S = \pi R^2 = \frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$.

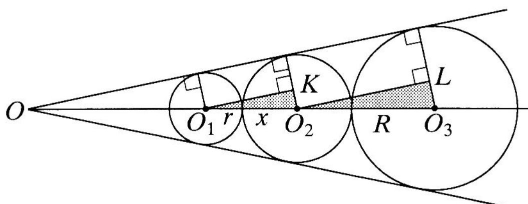


29. Pažymėkime kampo viršūnę O, mažojo apskritimo centrą O_1 ir spindulį r, didžiojo apskritimo centrą O_2. Kadangi įbrėžto į kampą apskritimo centras yra kampo pusiaukampinėje, tai $\angle O_2OA = 30°$.



Nubrėžkime $O_1C \parallel AB$. Tada $\angle O_2O_1C = 30°$ (atitinkamieji kampai).
$O_1O_2 = r + R$, $O_2C = R - r = \frac{1}{2}O_1O_2$ (statinis prieš $30°$ kampą) $\Rightarrow$
$R - r = \frac{1}{2}(r+R) \Rightarrow 3r = R$ ir $r = \frac{R}{3}$.

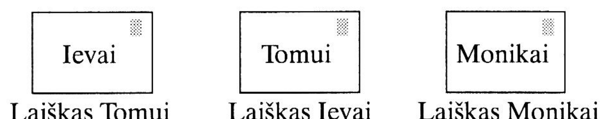
30. Tegu viduriniojo apskritimo spindulys lygus x.
Tada $O_1O_2 = r + x$, $O_2O_3 = x + R$, $O_2K = x - r$, $O_3L = R - x$.
Iš trikampių O_1O_2K ir O_2O_3L panašumo:
$\frac{O_1O_2}{O_2O_3} = \frac{O_2K}{O_3L} \Rightarrow \frac{r+x}{x+R} = \frac{x-r}{R-x} \Rightarrow x = \sqrt{Rr}$.



31. Dvi figūras šachmatų lentoje galime pastatyti $n = C_{64}^2$ būdais. Dvi figūras pastatyti pirmoje horizontalioje eilėje galime C_8^2 būdais, tiek pat būdų yra pastatyti figūras antroje, trečioje ir t. t. horizontaliose eilėse. Taigi yra $8 \cdot C_8^2$ galimybių pastatyti dvi figūras, kad jos stovėtų toje pačioje horizontalioje eilėje, ir dar $8 \cdot C_8^2$ būdų, kad figūros stovėtų toje pačioje vertikalioje eilėje. Taigi tikimybė, kad figūros stovės toje pačioje eilėje, lygi $\frac{16 \cdot C_8^2}{C_{64}^2} = \frac{2}{9}$, o tikimybė, kad nestovės, lygi $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

32. Viršutinė lemputė gali degti raudonai, geltonai, žaliai arba iš viso nedegti. Taigi yra 4 galimybės. Tiek pat galimybių yra ir antrajai bei trečiajai lemputėms. Taigi skirtingų šviesų kombinacijų yra $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$.

33. Yra $3! = 6$ būdai užrašyti adresus. Vienas atvejis pavaizduotas paveikslėlyje:



a) Kadangi yra vienas būdas teisingai užrašyti adresus, tai tikimybė, kad visi gaus jiems skirtus laiškus, lygi $\frac{1}{6}$.

b) Suraskime, kiek yra galimybių taip užrašyti adresus, kad nei vienas jų nebūtų užrašytas teisingai. Ant laiško Tomui adresą galime užrašyti dviem būdais. Jeigu, pavyzdžiui, ant laiško Tomui užrašėme Monikos adresą, tai ant Monikos laiško galime užrašyti tik Ievos adresą (jeigu užrašytume Tomo adresą, ant Ievos laiško turėtume užrašyti teisingą adresą). Taigi tėra dvi galimybės visus adresus užrašyti klaidingai. Tada būdų užrašyti juos taip, kad bent vienas būtų teisingas, yra $6 - 2 = 4$, ir ieškoma tikimybė yra $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

c) Ant laiško Tomui reikia užrašyti teisingą adresą, likusius du laiškus galime adresuoti dviem būdais. Taigi tikimybė, kad Tomas gaus jam skirtą laišką, lygi $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

III. TIKIMYBĖS

11. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Vienuoliktos klasės vadovėlio tikimybių skyriuje daugiausia dėmesio skyrėme įvykiams ir jų tikimybių savybėms. Dabar mums labiau rūpės ne pačios baigtys ar įvykiai, bet su baigtimis susiję skaitinės reikšmės, t. y. atsitiktiniai dydžiai.

11.1. Atsitiktinio dydžio sąvoka

Viena vertus, kas yra atsitiktinis dydis, rodos, visiškai aišku. Rytdienos vidurdienio temperatūros negalime tiksliai numatyti, vadinasi — temperatūra yra atsitiktinis dydis. Kiek svers pirmas pajūryje surastas gintarėlis irgi numatyti negalime — šis dydis irgi yra atsitiktinis (jeigu gintarėlio nerasime, galime manyti, kad dydžio reikšmė lygi nuliui). Kita vertus, tie dydžiai, apie kuriuos kalbama tikimybių teorijoje, rodos, yra kažkas kita: ten minimos baigtys, sakoma, kad toms baigtims yra priskiriamos reikšmės, kad ta reikšmių priskyrimo taisyklė ir yra atsitiktinis dydis. Tačiau reiškinio ir jo teorinio modelio netapatumas — jokia naujiena! Kai matuojame tikrovės daiktų matmenis, skaičiuojame plotus ar tūrius, braižome ar tik įsivaizduojame trikampius, stačiakampius, briaunainius, kitus kūnus, o tikrovėje juk to visiškai nėra. Tai tėra mūsų minties vaizdiniai, tačiau jie padeda suvokti tuos daiktus, kurie iš tikrųjų yra. Taip ir su atsitiktiniais dydžiais: tirdami tikrovės reiškinį mes įsivaizduojame bandymą, jo baigčių aibę, baigtims skaitines reikšmes priskiriančią taisyklę, t. y. atsitiktinį dydį, t. y. kuriame matematinį reiškinio modelį. Kartais tai paprasta, pavyzdžiui, kai atsitiktinis dydžio reikšmė yra akučių skaičius ant atvirtusios lošimo kauliuko sienelės; kartais gana keblu, pavyzdžiui, kai atsitiktinio dydžio reikšmė — grybaujant rastų baravykų skaičius.

Suvokiame ir žinome:
kaip atsitiktiniai dydžiai „pasirodo“ tikrovėje;
kaip atsitiktiniai dydžiai apibrėžiami matematiškai.

Mokame užrašyti formalią reikšmių priskyrimo taisyklę, kai atsitiktinis dydis nusakytas žodžiais.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šio skyrelio uždaviniai skirti pačios atsitiktinio dydžio sąvokos įsisavinimui. Svarbu suvokti, kad atsitiktinis dydis yra nusakomas taisykle, priskiriančia baigtims skaitines reikšmes.

1. Bandymas — vieno kauliuko metimas. Šio bandymo baigčių aibė yra $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Tuomet atsitiktinis dydis X nusakomas lygybėmis: $X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = -1$, $X(e_4) = X(e_5) = 0$, $X(e_6) = 2$.

2. Bandymo baigtis galime pažymėti taip:
$e_1 = (H; H)$, $e_2 = (H; 5)$, $e_3 = (2; H)$, $e_4 = (2; 5)$;
čia H žymi monetos atsivertimą herbu, skaičius — monetos centų skaičių.
Tuomet lygybės, apibrėžiančios atsitiktinį dydį X, tokios:
$X(e_1) = 0$, $X(e_3) = 2$, $X(e_2) = 5$, $X(e_4) = 7$.

3. Bandymo baigčių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Tuomet lygybės, nurodančios, kaip atsitiktinio dydžio X reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių, tokios: $X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = 1$, $X(e_4) = X(e_5) = 2$, $X(e_6) = 3$.

4. Bandymo baigtis pažymėkime taip:
$e_1 = (1a)$, $e_2 = (1b)$, $e_3 = (2c)$, $e_4 = (2d)$, $e_5 = (2e)$, $e_6 = (3f)$.
Tuomet atsitiktinis dydis X apibrėžtas lygybėmis:
$X(e_1) = X(e_2) = 1$, $X(e_3) = X(e_4) = X(e_5) = 2$, $X(e_6) = 3$.

5. Tarkime, kad raidėmis a ir b pažymėti balti rutuliai, o raide c pažymėtas juodas rutulys. Tuomet imant du rutulius, galimos trys baigtys:
$e_1 = (a, b)$, $e_2 = (a, c)$, $e_3 = (b, c)$.
Atsitiktinį dydį X nusako šios lygybės: $X(e_2) = X(e_3) = 1$, $X(e_1) = 2$.

6. Renkantis natūralųjį skaičių n, $2 \leqslant n \leqslant 10$, galimos 9 baigtys: $e_1 = (2)$, $e_2 = (3)$, $e_3 = (4)$, $e_4 = (5)$, $e_5 = (6)$, $e_6 = (7)$, $e_7 = (8)$, $e_8 = (9)$, $e_9 = (10)$. Skaičių 2, 4, 6, 8 ir 10 mažiausias pirminis daliklis yra 2, skaičių 3 ir 9 mažiausias pirminis daliklis yra 3, o skaičiai 5 ir 7 — patys pirminiai. Todėl atsitiktinis dydis X apibrėžiamas tokiomis lygybėmis: $X(e_1) = X(e_3) = X(e_6) = X(e_7) = X(e_9) = 2$, $X(e_2) = X(e_8) = 3$, $X(e_4) = 5$, $X(e_6) = 7$.

7. Dviejų lošimo kauliukų (I-o ir II-o) metimo rezultatus ir atsitiktinio dydžio X reikšmes patogu surašyti į kvadratinę lentelę:
joje l_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, pažymėta I-ojo kauliuko atvirtusi sienelė;
L_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, — II-ojo kauliuko atvirtusi sienelė;
šalia — skaičius, užrašytas ant šios sienelės.
Bandymo baigtis pažymėkime vartodami du indeksus: $e_{ij} = (l_i, L_j)$.
Atsitiktinis dydis X gali įgyti reikšmes 2, 3 ir 4.

II \ I	$l_1 - 1$	$l_2 - 1$	$l_3 - 1$	$l_4 - 1$	$l_5 - 2$	$l_6 - 2$
$L_1 - 1$	2	2	2	2	3	3
$L_2 - 1$	2	2	2	2	3	3
$L_3 - 1$	2	2	2	2	3	3
$L_4 - 1$	2	2	2	2	3	3
$L_5 - 2$	3	3	3	3	4	4
$L_6 - 2$	3	3	3	3	4	4

Lygybes, apibrėžiančias atsitiktinį dydį X, galima užrašyti taip:
$X(e_{ij}) = 2$, kai $i = 1, 2, 3, 4$ ir $j = 1, 2, 3, 4$;
$X(e_{ij}) = 3$, kai $i = 5, 6$ ir $j = 1, 2, 3, 4$ arba kai $i = 1, 2, 3, 4$ ir $j = 5, 6$;
$X(e_{ij}) = 4$, kai $i = 5, 6$ ir $j = 5, 6$.

8. Bandymo baigtis ir atsitiktinio dydžio, t. y. išlošio $a - b$, reikšmes surašykime lentelėje:

b \ a	1	2	3
1	0	1	2
2	−1	0	1
3	−2	−1	0

Bandymo baigtis pažymėkime $e_{ab} = (a, b)$, $a = 1, 2, 3$, $b = 1, 2, 3$.
Tuomet atsitiktinį dydį $X = a - b$ nusako lygybės:
$X(e_{13}) = -2$, $X(e_{12}) = X(e_{23}) = -1$, $X(e_{11}) = X(e_{22}) = X(e_{33}) = 0$,
$X(e_{21}) = X(e_{32}) = 1$, $X(e_{31}) = 2$.

9. Bandymas — du šūviai. Kiekvienu šūviu šaulys gali pelnyti 1, 2 arba 3 taškus. Visus galimus variantus patogu vaizduoti lentele (žr. paraštėje).
Pažymėję baigtis $e_{ij} = (i, j)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, atsitiktinį dydį X galime apibrėžti lygybėmis:
$X(e_{11}) = 2$, $X(e_{21}) = X(e_{12}) = 3$, $X(e_{31}) = X(e_{22}) = X(e_{13}) = 4$,
$X(e_{32}) = X(e_{23}) = 5$, $X(e_{33}) = 6$.

II \ I	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

10. a) Bandymo baigtis pažymėkime taip:
$e_1 = (0)$ — Tomas neišsprendė nė vieno uždavinio;
$e_2 = (1)$ — išsprendė tik pirmą uždavinį;
$e_3 = (2)$ — išsprendė tik antrą uždavinį;
$e_4 = (3)$ — išsprendė tik trečią uždavinį;
$e_5 = (1, 2)$ — išsprendė tik pirmą ir antrą uždavinį;
$e_6 = (1, 3)$, $e_7 = (2, 3)$, $e_8 = (1, 2, 3)$.
b) Atsitiktinio dydžio X reikšmių aibė yra $\{0, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}$.
c) Atsitiktinis dydis X apibrėžiamas lygybėmis: $X(e_1) = 0$, $X(e_2) = 2$, $X(e_3) = 3$, $X(e_4) = X(e_5) = 5$, $X(e_6) = 7$, $X(e_7) = 8$, $X(e_8) = 10$.

11. Atsitiktinis dydis X gali įgyti reikšmes 2, 3, 4, 5, ..., t. y. $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$.
Bandymo baigtis galima užrašyti taip:
$e_1 = (H, H)$ — pirmuoju ir antruoju metimu atsivertė herbas (tuomet $X = 2$);
$e_2 = (H, S, H)$ — pirmuoju ir trečiuoju metimu atsivertė herbas, o antruoju — skaičius ($X = 3$);
toliau:
$e_3 = (S, H, H)$, ($X = 3$);
$e_4 = (S, S, H, H)$;
$e_5 = (S, H, S, H)$;
$e_6 = (H, S, S, H)$, ($X = 4$).
Taigi reikšmę $X = 4$ atitinka 3 baigtys.

11.2. Atsitiktinių dydžių skirstiniai

Svarbiausi klausimai apie atsitiktinius dydžius, su kuriais susiduriama tikrovėje, formuluojami labai paprastai: kaip dažnai dydis įgyja vieną ar kitą reikšmę? kaip dažnai jo reikšmės mažesnės už nurodytą skaičių? kaip dažnai jo reikšmės priklauso vienai ar kitai aibei? Svarbiausi klausimai apie „teorinius" atsitiktinius dydžius irgi yra tie patys. Ir atsakymai gali būti pateikti panašiai: sudarant skirstinius, t. y. reikšmių tikimybių (dažnių) lenteles. Tik teorijoje tos tikimybės surandamos remiantis atsitiktinio dydžio apibrėžimo taisykle, o praktikoje tenka pasidarbuoti kartojant bandymus, kuriuose yra stebimos atsitiktinio dydžio reikšmės. Skyrelyje pateikti trys skirstinių sudarymo pavyzdžiai — du teorinio skirstinio ir vienas empirinio. Nepraleiskime antrojo pavyzdžio apie dviejų kauliukų metimą. Paprastas baigčių vaizdavimas lentele neretai gali padėti išvengti apmaudžių klaidų ir nesusipratimų.

Suvokiame ir žinome:

kas yra atsitiktinio dydžio teorinis ir empirinis skirstinys;

kaip sudaromi skirstiniai.

Mokame:

sudaryti atsitiktinio dydžio skirstinį, kai dydis apibrėžtas taisykle;

sudaryti empirinį atsitiktinio dydžio skirstinį, kai duoti stebėjimų duomenys.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelyje pateikta gana daug atsitiktinių dydžių skirstinių sudarymo pratimų. Pradėkime nuo pirmųjų. Kai skirstinio sudarymas nebekelia klausimų, galima pereiti prie antros pratimų dalies (22–26). Išspręskime bent vieną pratimą, kur reikia sudarant skirstinį pasinaudoti įvykių nepriklausomumu (21–24), po to vieną iš 25–26 pratimų.

12. Įprastinio lošimo kauliuko atveju nagrinėjamo atsitiktinio dydžio — išlošio — reikšmių tikimybes apskaičiuojame pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą.

m	-1	0	3
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

13. Atsitiktinio dydžio X reikšmių tikimybes apskaičiuojame surašę visas vienodai galimas bandymo baigtis:
$e_1=(0,0)$, $e_2=(20,0)$, $e_3=(0,50)$, $e_4=(20,50)$.

m	0	20	50	70
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

14. Abiejų atsitiktinių dydžių skirstinius surandame parašę bandymo baigtis:
$e_1=(1a,2b)$, $e_2=(1a,2c)$, $e_3=(2b,2c)$. Taigi:

m	3	4
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

m	2	4
$\mathbf{P}(Y=m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

15.

m	1	2	4
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

16. Stebėti atsitiktinio dydžio X reikšmes ir apskaičiuoti šių reikšmių tikimybes patogu iš lentelės:

II \ I	1	1	2	2	2	3
1	2	2	3	3	3	4
1	2	2	3	3	3	4
2	3	3	4	4	4	5
2	3	3	4	4	4	5
2	3	3	4	4	4	5
3	4	4	5	5	5	6

m	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{36}$

17.

m	0	1
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

18. Žalių balionų skaičius tarp dviejų paimtųjų gali būti 0, 1 arba 2. Vadinasi, turime apskaičiuoti tikimybes atitinkamai — kad abu balionai bus raudoni, kad bus paimta po vieną abiejų spalvų balioną ir kad abu bus žali. Todėl pirmojo įvykio tikimybė yra $\frac{C_4^2}{C_7^2}$, antrojo — $\frac{4\cdot 3}{C_7^2}$, trečiojo — $\frac{C_3^2}{C_7^2}$. Apskaičiavę šias tikimybes, gausime atsitiktinio dydžio X skirstinį (žr. lentelę paraštėje).

m	0	1	2
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

19. Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą įvykio, kad abu balionai raudoni ($X = 0$), tikimybė lygi $\frac{16}{49}$; kad abu žali ($X = 2$) — $\frac{9}{49}$; kad vienas raudonas, vienas žalias ($X = 1$) — $\frac{24}{49}$. Todėl atsitiktinio dydžio X skirstinys yra

m	0	1	2
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{16}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{9}{49}$

20. a) Numeriais 1 ir 2 pažymėti sektoriai užima po $\frac{1}{8}$ skritulio ploto. Sektorius su skaičiumi 3 užima $\frac{3}{4}$ skritulio ploto. Todėl atsitiktinio dydžio X skirstinys toks:

m	1	2	3
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$

b) Pirmojo ir antrojo šūvių galimus rezultatus ir jų sumas patogu vaizduoti lentelėje (žr. paraštėje).
Iš lentelės matome, kad atsitiktinio dydžio Y reikšmės yra 2, 3, 4, 5 ir 6. Tikimybė, jog Y įgis reikšmę 2, lygi $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$; jog įgis reikšmę 6, yra $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ (dviejų nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybės). Tikimybė, kad $Y = 3$, lygi $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{32}$; kad $Y = 5$, lygi $\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$. Tikimybė, kad $Y = 4$, lygi trijų nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybei, t. y. $\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{13}{64}$. Taigi atsitiktinio dydžio Y skirstinys toks:

II \ I	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

m	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(Y=m)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{13}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$

21.

m	0	5	50	100
$\mathbf{P}(X=m)$	0,97	0,02	0,008	0,002

22. Krepšininkas abiejų metimų nepataikys ($X = 0$) su tikimybe $0,1\cdot 0,1 = 0,01$; abu pataikys ($X = 2$) su tikimybe $0,9\cdot 0,9 = 0,81$; vieną — pataikys, kito — nepataikys su tikimybe $0,9\cdot 0,1 + 0,1\cdot 0,9 = 0,18$:

m	0	1	2
$\mathbf{P}(X=m)$	0,01	0,18	0,81

23. Tikimybė, kad $X = 2$, lygi $0,8\cdot 0,9 = 0,72$; kad $X = 0$, yra $0,2\cdot 0,1 = 0,02$. Vienas metimas bus tikslus su tikimybe $0,8\cdot 0,1 + 0,2\cdot 0,9 = 0,26$. Taigi skirstinys toks:

m	0	1	2
$\mathbf{P}(X=m)$	0,02	0,26	0,72

24. Pritaikę priklausomų įvykių sankirtos tikimybės formulę, turėsime: tikimybė, kad $X = 2$, lygi $0,8\cdot 0,9 = 0,72$; tikimybė, kad $X = 0$, lygi $0,2\cdot 0,2 = 0,04$; tikimybė, kad $X = 1$, lygi $0,8\cdot 0,1 + 0,2\cdot 0,8 = 0,24$. Taigi

m	0	1	2
$\mathbf{P}(X=m)$	0,04	0,24	0,72

25.

m	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X=m)$	0,2	0,35	0,15	0,3

26.

m	−1	0	1	3	5
$\mathbf{P}(X=m)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2

11.3. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

Kokie skaičiai surašyti atsitiktinio dydžio skirstinio lentelės pirmoje eilutėje? Atsitiktinio dydžio reikšmės. Galima kiek pakeisti požiūrį ir tarti, kad surašytos galinčių įvykti atsitiktinių įvykių žymės (indeksai ar ženklai). Juk kai atsitiktinis dydis įgyja tam tikrą reikšmę, įvyksta atitinkamas įvykis. Taigi galima manyti, kad pirmoje skirstinio eilutėje išrašyti su atsitiktiniu dydžiu susiję įvykiai, o antroje — tų įvykių tikimybės. Jei nagrinėjamas kitas atsitiktinis dydis, galima sudaryti ir jo skirstinį: surašyti su juo susijusius įvykius ir jų tikimybes. Dabar iki nepriklausomų atsitiktinių dydžių sąvokos tik vienas žingsnis: jeigu bet kuris su pirmuoju atsitiktiniu dydžiu susijęs atsitiktinis įvykis nepriklauso nuo bet kurio su kitu atsitiktiniu dydžiu susijusiu įvykiu — dydžiai nepriklausomi. Tačiau lieka klausimas, kaip geriau „organizuoti" šių įvykių porų nepriklausomumo tikrinimą. Tai patogu atlikti sudarius atsitiktinių dydžių poros skirstinį. Verta išnagrinėti nors kiek ir ilgoką 1 pavyzdį, kuriame rodoma, kaip atsitiktinių dydžių poros skirstinys yra sudaromas.

Nemažiau už tikslius teorinius apibrėžimus svarbūs intuityvūs vaizdiniai. Jeigu urnoje yra keli skaičiais sužymėti rutuliai ir atsitiktinai traukiama vienas po kito du iš jų — ant jų užrašyti numeriai yra atsitiktinių dydžių reikšmės. Jeigu pirmąjį rutulį ištraukus jis į urną sugrąžinamas ir tik tada traukiamas antrasis — visi ir be tikrinimo sutiks, kad dydžiai, kurių reikšmės stebimos — nepriklausomi. Tačiau jeigu traukiama be grąžinimo — jie bus priklausomi, nebent ant visų rutulių bus užrašytas vienas ir tas pats skaičius.

Taigi paminėkime, kad dažnai išvada apie dydžių nepriklausomumą daroma ir be teorinio lygybių tikrinimo. Tačiau kartais tik patikrinus galima padaryti teisingą išvadą. Pavyzdžiui, jei bandymas yra dviejų kauliukų metimas, tai akučių skaičius ant atvirtusios pirmojo kauliuko sienelės ir akučių skaičius ant antrojo kauliuko sienelės — nepriklausomi dydžiai. Tačiau ar tikrai priklausomi dydžiai yra atvirtusių akučių skaičių suma ir, pavyzdžiui, skirtumas — sužinosime tik patikrinę pagal apibrėžimą.

Suvokiame ir žinome:

kokie atsitiktiniai dydžiai vadinami nepriklausomais;
kaip patikrinti, ar atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi ir kada tai reikia daryti, kada nebūtina.

Mokame:

sudaryti atsitiktinių dydžių poros skirstinį;
naudojantis atsitiktinių dydžių poros skirstiniu sudaryti kiekvieno iš dydžių skirstinius;
patikrinti, ar dydžiai yra nepriklausomi.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Visos skyrelio užduotys panašios. Pakaks, jeigu moksleivis viską iki galo suvokdamas atliks bent vieną iš jų.

27. a) Pirmojo ir antrojo traukimo galimus rezultatus pažymėkime $b0$, $j0$, $r0$, $m1$. Tuomet bandymo (dviejų traukimų) vienodai galimų baigčių aibę sudaro 16 baigčių:
$e_1 = (b0, b0)$, $e_2 = (b0, j0)$, $e_3 = (b0, r0)$, $e_4 = (b0, m1)$,
$e_5 = (j0, b0)$, $e_6 = (j0, j0)$, $e_7 = (j0, r0)$, $e_8 = (j0, m1)$,
$e_9 = (r0, b0)$, $e_{10} = (r0, j0)$, $e_{11} = (r0, r0)$, $e_{12} = (r0, m1)$,
$e_{13} = (m1, b0)$, $e_{14} = (m1, j0)$, $e_{15} = (m1, r0)$, $e_{16} = (m1, m1)$.

b) $X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = X(e_4) = \cdots = X(e_{12}) = 0$,
$X(e_{13}) = X(e_{14}) = X(e_{15}) = X(e_{16}) = 1$;
$Y(e_1) = Y(e_2) = Y(e_3) = Y(e_5) = Y(e_6) = Y(e_7) = Y(e_9) = Y(e_{10}) = Y(e_{11}) = Y(e_{13}) = Y(e_{14}) = Y(e_{15}) = 0$,
$Y(e_4) = Y(e_8) = Y(e_{12}) = Y(e_{16}) = 1$.

c)

m	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

d)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

28. a) Traukimo iš pirmosios urnos rezultatus pažymėkime b_1, b_2, j_3, traukimo iš antrosios urnos galimi rezultatai tegu bus tokie: B_1J_2, B_1J_3, J_2J_3. Tuomet bandymo (traukimo iš abiejų urnų) vienodai galimų baigčių aibė yra:
$e_1 = (b_1, B_1J_2)$, $e_2 = (b_1, B_1J_3)$, $e_3 = (b_1, J_2J_3)$,
$e_4 = (b_2, B_1J_2)$, $e_5 = (b_2, B_1J_3)$, $e_6 = (b_2, J_2J_3)$,
$e_7 = (j_3, B_1J_2)$, $e_8 = (j_3, B_1J_3)$, $e_9 = (j_3, J_2J_3)$.

b) Lygybės, nurodančios, kaip atsitiktinių dydžių X, Y reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių, tokios:
$X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = X(e_4) = X(e_5) = X(e_6) = 0$;
$X(e_7) = X(e_8) = X(e_9) = 1$;
$Y(e_1) = Y(e_2) = Y(e_4) = Y(e_5) = Y(e_7) = Y(e_8) = 1$;
$Y(e_3) = Y(e_6) = Y(e_9) = 2$.

c)

m	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

m	1	2
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

d)

$Y \backslash X$	0	1
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

29. a)

m	0	1	2
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

m	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b)

$Y \backslash X$	0	1	2
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
5	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
6	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

30. a)

m	-2	-1	3
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

m	-1	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

b) Bandymą sudaro du nepriklausomi bandymai — iš pradžių pirmojo rato pasukimas, po to — antrojo rato pasukimas. Todėl X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. (*Pastaba.* Uždavinio sąlygoje neturi būti c) užduoties). Naudodamiesi atsitiktinių dydžių X ir Y nepriklausomumu, sudarykime poros (X, Y) skirstinį:

$Y \backslash X$	-2	-1	3
-1	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$

31. a) Urnoje esančius rutulius pažymėkime b_0, j_0, r_0, m_1. Bandymo baigtys:
$e_1 = (b_0, j_0)$, $e_2 = (b_0, r_0)$, $e_3 = (b_0, m_1)$,
$e_4 = (j_0, b_0)$, $e_5 = (j_0, r_0)$, $e_6 = (j_0, m_1)$,
$e_7 = (r_0, b_0)$, $e_8 = (r_0, j_0)$, $e_9 = (r_0, m_1)$,
$e_{10} = (m_1, b_0)$, $e_{11} = (m_1, j_0)$, $e_{12} = (m_1, r_0)$.

b) Kadangi bandymo baigtys yra vienodai galimos, apskaičiuojame X ir Y reikšmių tikimybes:

m	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

c)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	0

32. Pirmosios urnos rutulius pažymėkime b_1, b_2, m_3, antrosios — B_1, M_2, M_3.

a) Bandymo baigtys tokios:
$e_1 = (b_1, b_1)$, $e_2 = (b_1, B_1)$, $e_3 = (b_1, M_2)$, $e_4 = (b_1, M_3)$,
$e_5 = (b_2, b_2)$, $e_6 = (b_2, B_1)$, $e_7 = (b_2, M_2)$, $e_8 = (b_2, M_3)$,
$e_9 = (m_3, m_3)$, $e_{10} = (m_3, B_1)$, $e_{11} = (m_3, M_2)$, $e_{12} = (m_3, M_3)$.

b)

m	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$

c)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

11.4. Binominiai atsitiktiniai dydžiai

Tai labai svarbus atsitiktinių dydžių tipas tikimybių teorijoje ir jos taikymuose. Juk bandymai, kurių rezultatai vertinami dvejopai — kaip sėkmė ar nesėkmė, pasitaiko itin dažnai.

Artėti prie bendrojo binominių atsitiktinių dydžių apibrėžimo pradedama nuo nesimetriškos monetos mėtymo. Išnagrinėkime dviejų, trijų, galbūt ir keturių bandymų serijas, sudarykime sėkmių skaičiaus skirstinius. Kaip nagrinėti bendrąjį atvejį — tegu nuspręs patys mokytojai. Jeigu matyti, kad moksleiviai neįstengs sekti samprotavimų: „o dabar, tarkime, monetą metame n kartų..." pakaks tik užrašyti ir paaiškinti sėkmių skaičiaus atlikus n bandymų tikimybės formulę.

Paminėkime kiek netikėtai išnirusią Niutono binomo formulę. Išvedėme ją pradėję nuo tikimybių. Tačiau dviejų dėmenų sumos n-tasis laipsnis su atsitiktiniais įvykiais, atrodo, neturi nieko bendro. Šį tą vis dėlto turi. Galima tą formulę gauti sudauginus n sumų $(a+b)$ ir surinkus panašius narius. Tačiau renkant panašius narius reikėtų skaičiuoti variantų skaičių, panašiai kaip skaičiuojant tikimybes. Taigi tas pats metodas pritaikytas tikimybiniame kontekste duoda sėkmių skaičiaus tikimybės formulę, o bendresniame kontekste — Niutono binomo formulę.

Suvokiame ir žinome:

kaip binominiai atsitiktiniai dydžiai „atsiranda" paprastame monetos mėtymo bandyme;

kaip gaunama sėkmių skaičiaus tikimybė.

Mokame:

atpažinti bandymų su dviem sėkmėmis seką įvairiose aplinkybėse;

taikyti sėkmių skaičiaus tikimybės formulę.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Kone visų uždavinių sprendimo kelias tas pats — atpažinti binominius dydžius, nustatyti parametrų reikšmes ir pritaikyti sėkmių skaičiaus tikimybės formulę. Vertėtų pasirinkti ir išspręsti po kelis uždavinius, kurių sąlygose sėkmių tikimybės nurodytos tiesiogiai, o taip pat — surandamos iš procentų.

33. Pažymėkime X — laimingų bilietų skaičių iš 5 pirktų. Tada:
a) $\mathbf{P}(X=2)=C_5^2\cdot(0{,}08)^2\cdot(0{,}92)^3\approx 0{,}0498$;
b) $\mathbf{P}(X=3)=C_5^3\cdot(0{,}08)^3\cdot(0{,}92)^2\approx 0{,}0043$;
c) $\mathbf{P}(X=5)=(0{,}08)^5\approx 3{,}28\cdot 10^{-6}$.

34. Tikimybė, kad, metus kauliuką vieną kartą, atvirs daugiau negu 4 akutės, lygi $\frac{1}{3}$. Tegu X — atsitiktinis dydis, reiškiantis kiek kartų įvyks šis įvykis, metus kauliuką 4 kartus. Tada:
a) $\mathbf{P}(X=2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{6\cdot 2^2}{3^4}\approx 0{,}2963$;
b) $\mathbf{P}(X=3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 2}{3^4}\approx 0{,}0988$;
c) $\mathbf{P}(X=4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4\approx 0{,}0123$;
$\mathbf{P}(X\geqslant 2)=\mathbf{P}(X=2)+\mathbf{P}(X=3)+\mathbf{P}(X=4)\approx 0{,}4074$;
d) $\mathbf{P}(X<3)=1-(\mathbf{P}(X=3)+\mathbf{P}(X=4))\approx 1-0{,}1111=0{,}8889$.

35. $\mathbf{P}(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $\mathbf{P}(X=1)=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $\mathbf{P}(X=2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $\mathbf{P}(X=3)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $\mathbf{P}(X=4)=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $\mathbf{P}(X=5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5$.
Atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinys:

m	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

36. Tegu A — įvykis, kad, vieną kartą metus du lošimo kauliukus, atvirtusių akučių suma didesnė negu 8. Tuomet $\mathbf{P}(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$. Pažymėkime X — įvykio A įvykimų skaičių po 4 bandymų. Tuomet:
a) $\mathbf{P}(X=2)=C_4^2\cdot\left(\frac{5}{18}\right)^2\cdot\left(\frac{13}{18}\right)^2\approx 0{,}2415$;
b) $\mathbf{P}(X=3)=C_4^3\cdot\left(\frac{5}{18}\right)^3\cdot\frac{13}{18}\approx 0{,}0619$;
c) $\mathbf{P}(X=0)=\left(\frac{13}{18}\right)^4\approx 0{,}2721$.

37. Tarkime, kad X — pataikymų į taikinį skaičius po 3 šūvių. Tuomet
$\mathbf{P}(X=0)=(0{,}3)^3=0{,}027$, $\mathbf{P}(X=1)=3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^2=0{,}189$,
$\mathbf{P}(X=2)=3\cdot(0{,}7)^2\cdot 0{,}3=0{,}441$, $\mathbf{P}(X=3)=0{,}7^3=0{,}343$.
Tikimybių skirstinys toks:

m	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X=m)$	0,027	0,189	0,441	0,343

38. Pažymėkime X — sudygusių sėklų skaičių. Tuomet:
a) $\mathbf{P}(X=3)=C_6^3\cdot(0{,}98)^3\cdot(0{,}02)^3\approx 0{,}0002$;
b) $\mathbf{P}(X=4)=C_6^4\cdot(0{,}98)^4\cdot(0{,}02)^2\approx 0{,}0055$;
c) $\mathbf{P}(X=6)=(0{,}98)^6\approx 0{,}8858$.

39. Tegu X — apdraustų automobilių skaičius iš penkių atsitiktinai pasirinktų. Tuomet:
a) $\mathbf{P}(X=2)=C_5^2\cdot(0{,}8)^2\cdot(0{,}2)^3=0{,}0512$;
b) $\mathbf{P}(X=0)=(0{,}2)^5=0{,}00032$,
$\mathbf{P}(X=1)=5\cdot 0{,}8\cdot(0{,}2)^4=0{,}0064$,
$\mathbf{P}(X\geqslant 2)=1-(\mathbf{P}(X=0)+\mathbf{P}(X=1))=1-0{,}00672=0{,}99328$;
c) $\mathbf{P}(X<2)=\mathbf{P}(X=0)+\mathbf{P}(X=1)=0{,}00672$.

40. Pažymėkime X — monetų, atsivertusių herbu, skaičių.
a) $\mathbf{P}(X=5)=C_{10}^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{252}{1024}\approx 0{,}2461$;
b) $\mathbf{P}(X=10)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx 0{,}00098$.

41. Apskaičiuokime abiejų įvykių tikimybes: įvykio A — Petras laimės prieš Joną 3 partijas iš 4, ir įvykio B — Petras laimės prieš Joną 5 partijas iš 8:
$\mathbf{P}(A)=C_4^3\cdot(0{,}5)^4=0{,}25$, $\mathbf{P}(B)=C_8^5\cdot(0{,}5)^8=0{,}21875$. Taigi $\mathbf{P}(A)>\mathbf{P}(B)$.

42. Tarkime, kad iš 8 užėjusių į parduotuvę žmonių, ką nors nusipirks X žmonių:
a) $\mathbf{P}(X=4)=C_8^4\cdot(0{,}3)^4\cdot(0{,}7)^4\approx 0{,}1361$;
b) $\mathbf{P}(X=5)=C_8^5\cdot(0{,}3)^5\cdot(0{,}7)^3\approx 0{,}0467$.

43. Apskaičiuokime įvykio A — jog krepšininkas pataikys 6 kartus iš 10, ir įvykio B — jog pataikys 8 kartus iš 10, tikimybes: $\mathbf{P}(A)=C_{10}^6\cdot(0{,}7)^6\cdot(0{,}3)^4\approx 0{,}2001$;
$\mathbf{P}(B)=C_{10}^8\cdot(0{,}7)^8\cdot(0{,}3)^2\approx 0{,}2335$. Taigi $\mathbf{P}(B)>\mathbf{P}(A)$.

44. Tarkime, kad iš 7 naujagimių gims X berniukų. Tuomet
$\mathbf{P}(X\geqslant 1)=1-\mathbf{P}(X=0)=1-(0{,}49)^7\approx 0{,}9932$.

45. Tegu X — bankrutavusių įmonių skaičius iš 10 naujai susikūrusių. Tuomet:
a) $\mathbf{P}(X=3)=C_{10}^3\cdot(0{,}25)^3\cdot(0{,}75)^7\approx 0{,}2503$;
b) $\mathbf{P}(X\leqslant 2)=\mathbf{P}(X=0)+\mathbf{P}(X=1)+\mathbf{P}(X=2)=$
$(0{,}75)^{10}+10\cdot 0{,}25\cdot(0{,}75)^9+C_{10}^2\cdot(0{,}25)^2\cdot(0{,}75)^8\approx 0{,}5256$.

46.

m	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Taigi didžiausia tikimybė $\mathbf{P}(X=2)=\mathbf{P}(X=3)=\frac{5}{16}$.

47. Pažymėkime sėkmės tikimybę viename bandyme raide p. Tuomet turi galioti lygybė $C_4^2\cdot p^2(1-p)^2=p^4$. Gavome:
$6(1-p)^2-p^2=0\Rightarrow 5p^2-12p+6=0\Rightarrow p=\frac{6\pm\sqrt{6}}{5}$.
Kadangi $\frac{6+\sqrt{6}}{5}>1$, tai $p=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$.

48. Krepšininkas, metęs į krepšį vieną kartą, pataikys su tikimybe 0,9. Tarkime, kad jis iš dešimties metimų pataikys X. Tuomet:
a) $\mathbf{P}(X=5)=C_{10}^5\cdot(0{,}9)^5\cdot(0{,}1)^5\approx 0{,}0015$;
b) $\mathbf{P}(X=8)=C_{10}^8\cdot(0{,}9)^8\cdot(0{,}1)^2\approx 0{,}1937$;
c) $\mathbf{P}(X=10)=(0{,}9)^{10}\approx 0{,}3487$.

49. Tikimybė, kad iš dviejų atsitiktinai pasirinktų dvyliktokų nė vienas nėra aukštesnis negu 180 cm, lygi 0,01. Tuomet tikimybė, kad vienas iš atsitiktinai pasirinktų dvyliktokų nėra aukštesnis kaip 180 cm, yra 0,1, o kad yra aukštesnis negu 180 cm, lygi 0,9.
Tarkime, kad tarp 5 dvyliktokų X iš jų yra aukštesni negu 180 cm. Tuomet:
a) $\mathbf{P}(X=2)=C_5^2\cdot(0{,}9)^2\cdot(0{,}1)^3=0{,}0081$;
b) $\mathbf{P}(X=3)=C_5^3\cdot(0{,}9)^3\cdot(0{,}1)^2=0{,}0729$;
c) $\mathbf{P}(X=5)=(0{,}9)^5\approx 0{,}4305$.

50. Nagrinėkime santykį:
$$\frac{\mathbf{P}(X=m+1)}{\mathbf{P}(X=m)}=\frac{C_5^{m+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5}{C_5^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{5\cdot\ldots\cdot(5-m+1)\cdot(5-m)\cdot m!}{5\cdot\ldots\cdot(5-m+1)\cdot(m+1)!}=\frac{5-m}{m+1}.$$
Šis santykis didesnis už vienetą, kai $0\leqslant m<2$, ir mažesnis už vienetą, kai $2<m\leqslant 4$.

12. SKAITINĖS ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ CHARAKTERISTIKOS

12.1. Matematinė viltis

Matematinio vidurkio (arba matematinės vilties) sąvoka labai paprasta. Skaičiuoti matematinį vidurkį irgi greitai išmoks visi. Tačiau verta šiek tiek dėmesio skirti ir sąvokos prasmei. Ta prasmė irgi intuityviai gana aiški, lieka tik „priderinti“ formulę tai prasmei reikšti. Nagrinėjant 1 pavyzdį tai ir daroma: skaičiuojant vidutinį vienam kauliuko metimui tenkančių akučių skaičių „atrandama“ bendroji formulė. Išnagrinėjus pirmąjį pavyzdį galima dar kiek pasvarstyti, kas pasikeistų, jeigu kauliukas nebūtų simetriškas, t. y. sienelių atvirtimo tikimybės nebūtų vienodos.

Verta paminėti, kad atsitiktinio dydžio vidurkis nebūtinai yra ir atsitiktinio dydžio reikšmė. Pavyzdžiui, simetriško kauliuko atvirtusių akučių skaičiaus vidurkis yra 3,5. Tačiau tiek akučių niekada negausime. Pasiūlykite „sugalvoti“ savo kauliuką, t. y. surašyti ant sienelių skaičius, kad atvirtusių akučių skaičiaus vidurkis kartu būtų ir reikšmė. Trivialus sprendimas — ant visų sienelių surašyti vienodus skaičius.

Suvokiame ir žinome:

atsitiktinio dydžio matematinio vidurkio sąvokos prasmę;

atsitiktinio dydžio matematinio vidurkio apibrėžimą.

Mokame remiantis atsitiktinio dydžio skirstiniu apskaičiuoti matematinį atsitiktinio dydžio vidurkį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

51–59 uždaviniai sprendžiami sudarant atsitiktinio dydžio skirstinį ir tada jau pasinaudojant matematinio vidurkio apibrėžimu. Išsprendus keletą šios grupės uždavinių galima pasirinkti ir panagrinėti keletą 60–64 pratimų.

51. a) $\mathbf{E}X = (-1)\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}4 = 1{,}7$;
b) $\mathbf{E}X = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{12} + 5\cdot\frac{1}{12} = 2\frac{1}{3}$.

52. Atvirtusių akučių skaičiaus X skirstinys yra:

m	2	3	4
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$\mathbf{E}X = 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{6} = 2\frac{2}{3}$.

53. $\mathbf{E}X = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} = 2{,}5$.

54. $\mathbf{E}X = \frac{1}{8}\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8) = 4{,}5$.

55.

m	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\mathbf{E}X = 5$.

56. Vidutinis atvirtusių akučių skaičius yra:
$\bar{x} = \frac{1}{1000}\cdot(1\cdot 151 + 2\cdot 167 + 3\cdot 180 + 4\cdot 170 + 5\cdot 160 + 6\cdot 172) = 3{,}537$.
„Teorinė“ matematinė viltis $\mathbf{E}X = \frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5$.
Taigi $\bar{x} - \mathbf{E}X = 0{,}037$.

57. Tomo išlošio X tikimybių skirstinys yra:

m	-1	2
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\mathbf{E}X = (-1)\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} = 0$.

58.

m	0	2	5	7
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbf{E}X = 3{,}5$.

59.

m	0	1	2
$\mathbf{P}(X=m)$	0,0625	0,375	0,5625

$\mathbf{E}X = 1{,}5$.

60. Pažymėkime laimėjimo didumą X. Tuomet
$\mathbf{E}X = \frac{1}{8}\cdot(1+2+3+\dots+8) = \frac{36}{8} = 4{,}5$.
Vadinasi, bilieto kaina turėtų būti 4,70 Lt.

61.

m	-1	0	1
$\mathbf{P}(X=m)$	0,06	0,84	0,1

62. Išsprendę lygčių sistemą $\begin{cases} -2p_1 - p_2 + 0{,}2 = -1, \\ p_1 + p_2 + 0{,}3 = 1 \end{cases}$ gausime: $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}2$.

63. Tomas gali paimti du saldainius 6 būdais. Šio bandymo baigtys: $e_1 = (5,6)$, $e_2 = (5,7)$, $e_3 = (5,8)$, $e_4 = (6,7)$, $e_5 = (6,8)$, $e_6 = (7,8)$.
Tuomet dydžių X ir Y tikimybių skirstiniai tokie:

m	6	7	8
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

m	5	6	7
$\mathbf{P}(Y=m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$\mathbf{E}X = 6 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 7\frac{1}{3}$,
$\mathbf{E}Y = 5 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{1}{6} = 5\frac{2}{3}$.

64. Dviženklių skaičių n, tenkinančių sąlygą $10 \leqslant n \leqslant 30$, yra 21.
Skaitmenų sumos X tikimybių skirstinys yra:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

$\mathbf{E}X = \frac{1}{21} \cdot (1 + 4 + 9 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 11) = \frac{123}{21} = 5\frac{6}{7}$.

12.2. Atsitiktinio dydžio dispersija

Matematinė viltis nusako tam tikras atsitiktinio dydžio reikšmių sklaidos savybes: vidurkio reikšmė yra tarsi atsitiktinio dydžio reikšmių „centras“. Tačiau tokį pat centrą gali turėti labai įvairūs dydžiai, 1 pavyzdyje ir 1 skyrelio užduotyje nagrinėjami tokie atvejai. „Išsisklaidymo apie centrą“ didumas nusakomas dispersija arba standartiniu nuokrypiu. Atsitiktinio dydžio X dispersija yra naujo dydžio $Y = (X - \mathbf{E}X)^2$ vidurkis:

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2.$$

Galima atkreipti dėmesį, kad atsitiktinio dydžio Y skirstinys iš X skirstinio gaunamas labai paprastai: pakanka pakeisti pirmąją X skirstinio eilutę pakeičiant X reikšmes atitinkamomis Y reikšmėmis.

Atsitiktinio dydžio dispersija dažnai skaičiuojama remiantis ne apibrėžimu, bet formule

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2.$$

Suvokiame ir žinome atsitiktinio dydžio dispersijos ir standartinio nuokrypio sąvokų prasmę ir apibrėžimą.

Mokame naudojantis atsitiktinio dydžio skirstiniu apskaičiuoti atsitiktinio dydžio dispersiją ir standartinį nuokrypį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Sprendžiant 65–67 pratimus pakanka žinoti dispersijos apibrėžimą ir jį pritaikyti; 68, 71–72 užduotyse reikalaujama remiantis skaitinėmis charakteristikomis kokybiškai įvertinti situaciją; 74–75 pratimuose sudarant atsitiktinių dydžių skirstinius reikia pasinaudoti įvykių nepriklausomumu ir nesusipainioti skaičiuojant atvejus.

65. $\mathbf{E}X = -1 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}7$,
$\mathbf{D}X = (-1-1{,}7)^2 \cdot 0{,}2 + (1-1{,}7)^2 \cdot 0{,}1 + (2-1{,}7)^2 \cdot 0{,}3 + (3-1{,}7)^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}21$,
$\sigma(X) = \sqrt{2{,}21} \approx 1{,}49$;
$\mathbf{E}Y = 1{,}7$, $\mathbf{D}Y = 0{,}61$, $\sigma(Y) = \sqrt{0{,}61} \approx 0{,}78$;
Plačiau išsisklaidžiusios apie vidurkį dydžio X reikšmės.

66. Atvirtusių akučių skaičiaus X skirstinys yra:

m	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Tuomet $\mathbf{E}X = 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$,
$\mathbf{D}X = (2 - \frac{17}{6})^2 \cdot \frac{1}{3} + (3 - \frac{17}{6})^2 \cdot \frac{1}{2} + (4 - \frac{17}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{36} \approx 0{,}47$.

67. $\mathbf{E}X = \frac{1}{8} \cdot (-4 - 3 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3 + 4) = 0$,
$\mathbf{D}X = \frac{1}{8} \cdot (16 + 9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9 + 16) = \frac{60}{8} = 7{,}5$.

68. $\mathbf{E}X = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3{,}5$,
$\mathbf{E}Y = \frac{1}{4} \cdot (2 + 3 + 4 + 5) = \frac{14}{4} = 3{,}5$,
$\mathbf{D}X = 2{,}92$,
$\mathbf{D}Y = 1{,}25$.
Kadangi $\mathbf{D}X > \mathbf{D}Y$, labiau rizikuojame lošdami įprastiniu lošimo kauliuku.

69. $\mathbf{E}X = \frac{1}{4} \cdot (3 + 4 + 5 + 6) = \frac{18}{4} = 4{,}5$, $\mathbf{D}X = 1{,}25$;
$\mathbf{E}Y = \frac{1}{8} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = \frac{36}{8} = 4{,}5$, $\mathbf{D}Y = 5{,}25$.

70.

m	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}(X = m)$	$0{,}2^5$	$5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4$	$10 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3$	$10 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$	$5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2$	$0{,}8^5$

$\mathbf{E}X = 4$, $\mathbf{D}X = 0{,}8$.

71. $\mathbf{E}X = 3{,}5$, $\mathbf{D}X \approx 2{,}92$; bilieto kaina turi būti 4 Lt.

72. Tegu X — išlošio suma prie pirmojo rato, Y — išlošio suma prie antrojo rato. Šių dydžių skirstiniai tokie:

m	1	2	5
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

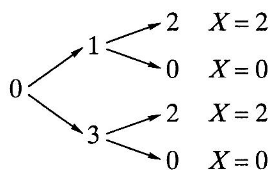
m	1	2	3
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbf{E}X = 1{,}875$, $\mathbf{E}Y = 1{,}875$,
$\mathbf{D}X \approx 1{,}61$, $\mathbf{D}Y \approx 0{,}61$.
Mažiau rizikinga lošti prie antrojo rato. Kita vertus, prie pirmojo rato yra galimybė išlošti 5 Lt.

73.

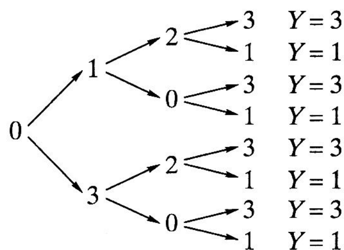
m	-1	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

74. Uždavinį spręsti bus lengviau, jei sugalvosime gerą būdą galimiems vabalo keliams žymėti. Čia mes siūlome kitokį negu vadovėlyje būdą — galimybių medį.



m	0	2
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

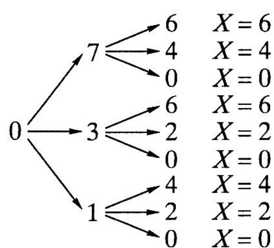
$\mathbf{E}X = 1$, $\mathbf{D}X = 1$.



m	1	3
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\mathbf{E}Y = 2$, $\mathbf{D}Y = 1$.

75. *Pastaba.* Sąlygoje, žinoma, minimas 74 uždavinio vabalas (o ne 10).



m	0	2	4	6
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\mathbf{E}X = \frac{24}{9} \approx 2{,}67$, $\mathbf{D}X \approx 5{,}33$.

13. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

Pastaba. Vadovėlyje pateikti neteisingi atsakymai šių uždavinių: 11d, 12c, 15, 20a, 22, 24, 27.

1. Bandymas — lošimo kauliuko metimas. Šis bandymas turi šešias vienodai galimas baigtis: $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ (įsivaizduokime, kad visos sienelės sunumeruotos). Tarkime, kad ant pirmos sienelės parašytas skaičius -2, ant antros sienelės — skaičius -1, ant trečios ir ketvirtos — po 0, ant penktos sienelės parašytas skaičius 1 ir ant šeštos sienelės parašytas skaičius 2. Taigi taisyklė, apibrėžianti atsitiktinį dydį X, yra:
$X(e_1) = -2$, $X(e_2) = -1$, $X(e_3) = X(e_4) = 0$, $X(e_5) = 1$, $X(e_6) = 2$.
Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą apskaičiuojame atsitiktinio dydžio X reikšmių tikimybes ir jas surašome į lentelę:

m	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tuomet $\mathbf{E}X = -2 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$,
$\mathbf{D}X = (-2)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{2}{3}$.
Dviejų lošimo kauliuko metimų (I-o ir II-o) rezultatas ir atsitiktinio dydžio Y reikšmes surašykime į lentelę; bandymo baigtis žymėkime $e_{ij} = (e_i, e_j)$:

II \ I		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
		-2	-1	0	0	1	2
e_1	-2	-4	-3	-2	-2	-1	0
e_2	-1	-3	-2	-1	-1	0	1
e_3	0	-2	-1	0	0	1	2
e_4	0	-2	-1	0	0	1	2
e_5	1	-1	0	1	1	2	3
e_6	2	0	1	2	2	3	4

Taisyklę, apibrėžiančią atsitiktinį dydį Y, galima užrašyti taip:
$Y(e_{11}) = -4$,
$Y(e_{12}) = Y(e_{21}) = -3$,
$Y(e_{13}) = Y(e_{22}) = Y(e_{31}) = Y(e_{14}) = Y(e_{41}) = -2$,
$Y(e_{15}) = Y(e_{24}) = Y(e_{42}) = Y(e_{51}) = Y(e_{23}) = Y(e_{32}) = -1$,
$Y(e_{16}) = Y(e_{25}) = Y(e_{34}) = Y(e_{43}) = Y(e_{52}) = Y(e_{61}) = Y(e_{33}) = Y(e_{44}) = 0$,
$Y(e_{26}) = Y(e_{35}) = Y(e_{53}) = Y(e_{62}) = Y(e_{45}) = Y(e_{54}) = 1$,
$Y(e_{36}) = Y(e_{46}) = Y(e_{55}) = Y(e_{64}) = Y(e_{63}) = 2$,
$Y(e_{56}) = Y(e_{65}) = 3$,
$Y(e_{66}) = 4$.
Apskaičiavę atsitiktinio dydžio Y reikšmių tikimybes, gauname skirstinį:

m	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\mathbf{E}Y = 0$, $\mathbf{D}Y = 3\frac{1}{3}$.
Analizuoti atsitiktinius dydžius Z ir U taip pat patogu iš lentelių.
Atsitiktinio dydžio Z reikšmės:

II \ I		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
		-2	-1	0	0	1	2
e_1	-2	4	2	0	0	-2	-4
e_2	-1	2	1	0	0	-1	-2
e_3	0	0	0	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0	0	0	0
e_5	1	-2	-1	0	0	1	2
e_6	2	-4	-2	0	0	2	4

Atsitiktinio dydžio U reikšmės:

	I	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
II		-2	-1	0	0	1	2
e_1	-2	0	1	2	2	3	4
e_2	-1	-1	0	1	1	2	3
e_3	0	-2	-1	0	0	1	2
e_4	0	-2	-1	0	0	1	2
e_5	1	-3	-2	-1	-1	0	1
e_6	2	-4	-3	-2	-2	-1	0

Sudarykime šių atsitiktinių dydžių skirstinius:

m	-4	-2	-1	0	1	2	4
$\mathbf{P}(Z=m)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

m	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(U=m)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Apskaičiuojame atsitiktinių dydžių Z ir U vidurkius bei dispersijas:
$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}U = 0$, $\mathbf{D}Z = 2\frac{7}{9}$, $\mathbf{D}U = 3\frac{1}{3}$.

2. Apskaičiavę, kurią skritulio dalį sudaro kiekvienas nurodytas sektorius, gausime atsitiktinio dydžio X atitinkamų reikšmių tikimybes, taigi ir skirstinį:

a)

m	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$

b) $\mathbf{P}(X \geqslant 2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = 0{,}625.$

c) $\mathbf{E}X = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{16} + 4 \cdot \frac{3}{16} = 2{,}1875,$
$\mathbf{D}X = \left(1-\frac{35}{16}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(2-\frac{35}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(3-\frac{35}{16}\right)^2 \cdot \frac{3}{16} + \left(4-\frac{35}{16}\right)^2 \cdot \frac{3}{16} \approx 1{,}28,$
$\sigma(X) = \sqrt{1{,}28} \approx 1{,}13.$

d) Vidutinis lošimo rato šeimininko pelnas apytikriai lygus $2{,}5 - 2{,}19 = 0{,}31$ Lt.

3. a) Nežinomas tikimybes rasime išsprendę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} -2 \cdot 0{,}1 + p_1 + 2p_2 = 0{,}8, \\ 0{,}1 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow p_1 = 0{,}8,\ p_2 = 0{,}1.$$

b) $\mathbf{D}X = (-2-0{,}8)^2 \cdot 0{,}1 + (1-0{,}8)^2 \cdot 0{,}8 + (2-0{,}8)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}96,$
$\sigma(X) = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98.$

4. Kadangi skaičiai α, β ir γ sudaro geometrinę progresiją, tai
$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma} \Rightarrow \ln\beta = \frac{1}{2}(\ln\alpha + \ln\gamma).$
Iš sąlygos išplaukia, kad turi galioti lygybės:
$\ln\alpha + \frac{1}{2}(\ln\alpha + \ln\gamma) + \ln\gamma = 1$ ir $1 \cdot \ln\alpha - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\ln\alpha + \ln\gamma) + 3\ln\gamma = 1.$
Sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \ln\alpha + \ln\gamma = \frac{2}{3}, \\ 2\ln\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \ln\gamma = \frac{1}{2},\ \ln\alpha = \frac{1}{6}.\ \text{Tada } \ln\beta = \frac{1}{3}.$$

a) Atsitiktinio dydžio X skirstinys toks:

m	-2	1	3
$\mathbf{P}(X=m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

b) $\mathbf{D}X = (-2-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 5,$
$\sigma(X) = \sqrt{5} \approx 2{,}24.$

5. Pataikytų metimų skaičius X — binominis atsitiktinis dydis su $n = 3$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Todėl:
$\mathbf{P}(X = 0) = 0{,}2^3 = 0{,}008,$
$\mathbf{P}(X = 1) = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}096,$
$\mathbf{P}(X = 2) = 3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384,$
$\mathbf{P}(X = 3) = 0{,}8^3 = 0{,}512.$

$\mathbf{E}X = 0 \cdot 0{,}008 + 1 \cdot 0{,}096 + 2 \cdot 0{,}384 + 3 \cdot 0{,}512 = 2{,}4$,
$\mathbf{D}X = (0-2{,}4)^2 \cdot 0{,}008 + (1-2{,}4)^2 \cdot 0{,}096 + (2-2{,}4)^2 \cdot 0{,}384 + (3-2{,}4)^2 \cdot 0{,}512 = 0{,}48$,
$\sigma(X) = \sqrt{0{,}48} \approx 0{,}69$.
Pastaba. Yra žinoma, jog binominio atsitiktinio dydžio X vidurkis $\mathbf{E}X = np$, o dispersija $\mathbf{D}X = npq$. Mūsų atveju
$\mathbf{E}X = 3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$, $\mathbf{D}X = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}48$.

6. Atvirtusių herbų skaičius X — binominis atsitiktinis dydis su $n = 5$, $p = q = 0{,}5$.

a)

m	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

b) $\mathbf{E}X = 2{,}5$, $\mathbf{D}X = 1{,}25$.

7. Laimėjimo dydžio X po trijų monetos metimų galimos reikšmės yra:
-3, kai ji nė karto neatvirs herbu;
0, kai moneta vieną kartą atvirs herbu;
3, kai moneta herbu atvirs du kartus;
6, kai moneta atvirs herbu tris kartus.
Todėl dydžio X reikšmių tikimybės yra tokios pat, kaip binominio atsitiktinio dydžio su $n = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$:

a)

m	-3	0	3	6
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) $\mathbf{E}X = -3 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$.

8. Tikimybė, kad įsigijus tris loterijos bilietus nelaimės nė vienas, yra $1 - \frac{19}{27} = \frac{8}{27}$, o tikimybė, kad nelaimės vienas nusipirktas bilietas, lygi $\frac{2}{3}$. Todėl:
a) tikimybė, kad vienas bilietas laimės, lygi $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$;
b) tikimybė, kad iš dviejų bilietų laimės vienas, yra $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (binominis atsitiktinis dydis su $n = 2$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$);
c) X — binominis atsitiktinis dydis su $n = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$;

m	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

d) $\mathbf{E}X = 1$, $\mathbf{D}X = \frac{2}{3}$.

9. Uždavinio bandymą — šešių mokinių valstybinio egzamino laikymą — galime interpretuoti kaip bandymo su dviem baigtimis — sėkme ir nesėkme — kartojimą 6 kartus. Todėl išvardytų įvykių tikimybes apskaičiuosime remdamiesi binominiu atsitiktiniu dydžiu su $n = 6$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$.
Tegu X — skaičius mokinių, kurie sėkmingai išlaikys egzaminą. Tuomet:
a) $\mathbf{P}(X = 0) = (0{,}1)^6 = 10^{-6}$;
b) $\mathbf{P}(X = 1) = 6 \cdot 0{,}9 \cdot (0{,}1)^5 = 5{,}4 \cdot 10^{-5}$;
c) $\mathbf{P}(X = 6) = 0{,}9^6 \approx 0{,}53$;
d) $\mathbf{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - 10^{-6}$.

10. Bandymo galimus rezultatus ir atitinkamas atsitiktinio dydžio X reikšmes surašykime lentelėje.
1. Kai $n = 3$, turėsime tokią lentelę:

II \ I	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

Atsitiktinio dydžio X galimų reikšmių 1, 2, 3 tikimybes apskaičiuojame pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą:

m	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$

$\mathbf{E}X = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{22}{9}$.

2. Kai $n = 4$:

I / II	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

m	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

$\mathbf{E}X = \frac{1}{16} \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7) = \frac{50}{16}.$

3.

I / II	1	2	3	...	n
1	1	2	3	...	n
2	2	2	3	...	n
3	3	3	3	...	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	n	n	n	n

m	1	2	3	...	n
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{3}{n^2}$	$\frac{5}{n^2}$	...	$\frac{2n-1}{n^2}$

$\mathbf{E}X = \frac{1}{n^2} \cdot \big(1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (2n-1)\big) =$
$\frac{1}{n^2} \cdot \big(1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) + 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1) + 3 \cdot (2 \cdot 3 - 1) + \cdots + n \cdot (2n-1)\big) =$
$\frac{1}{n^2} \cdot \big(2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\big) =$
$\frac{1}{n^2} \cdot \big(2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)n}{2}\big) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$

Pastaba. Vidurkį skaičiavome remdamiesi formule
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

11. Surašykime lentelėje visas galimas bandymo baigtis ir atitinkamas dydžių X ir Y reikšmes, pažymėdami raide K — kuoją, R — raudę, E — ešerį:

Baigtis	KK	KR	KE	RK	RR	RE	EK	ER	EE
X	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Y	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Šios lentelės pirmoje eilutėje surašytos bandymo baigtys (punktas a). Po baigtimis — atitinkamos dydžių X ir Y reikšmės (punktas b).

c)

m	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{9}$

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{9}$

d) Iš baigčių lentelės nesunku parašyti poros (X, Y) skirstinį:

X / Y	0	1
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

e) Dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, nes teisingos lygybės:

$\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) \cdot \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9};$

$\mathbf{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9};$

$\mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbf{P}(X = 0) \cdot \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9};$

$\mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$

12. Kaip ir 11 uždavinyje pažymėkime K — kuoją, R — raudę, E — ešerį. Sudarykime bandymo baigčių bei atsitiktinių dydžių X ir Y reikšmių lentelę (*a*; *b*):

Baigtis	KR	KE	RK	RE	EK	ER
X	1	1	0	0	0	0
Y	0	1	0	1	0	0

c)

Y \ X	0	1
0	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

d)

m	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$

e) Dydžiai X ir Y yra priklausomi, nes, pavyzdžiui, $\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, tačiau $\mathbf{P}(X = 0) \cdot \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$.

13. Dydžių X ir Y skirstiniai iš poros (X, Y) skirstinio gaunami sudedant atitinkamai stulpelių ir eilučių tikimybes.

Y \ X	1	2	Y
-1	0,1	0,2	0,3
0	0,2	0,3	0,5
1	0,1	0,1	0,2
X	0,4	0,6	

a) Dydžių X ir Y skirstiniai yra tokie:

m	1	2
$\mathbf{P}(X = m)$	0,4	0,6

m	-1	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	0,3	0,5	0,2

b) Dydžiai X ir Y yra priklausomi, nes, pavyzdžiui $\mathbf{P}(X = 1, Y = -1) \neq \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = -1)$.

14. Apskaičiuojame atsitiktinių dydžių X ir Y skirstinius:

Y \ X	-2	-1	0	1	Y
0	0,06	0,06	0,04	0,04	0,2
1	0,24	0,24	0,16	0,16	0,8
X	0,3	0,3	0,2	0,2	

a) Skirstiniai yra tokie:

m	-2	-1	0	1
$\mathbf{P}(X = m)$	0,3	0,3	0,2	0,2

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	0,2	0,8

b) Dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, nes su visomis x ir y reikšmėmis teisingos lygybės
$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y)$.

15. Tegu pirmosios dalies ilgis yra x m. Tada antrosios dalies ilgis yra $(1 - x)$ m; čia $0 < x < 1$. Sprendžiame nelygybę:
$x \geqslant 1{,}25 \cdot (1 - x) \Rightarrow 2{,}25x \geqslant 1{,}25 \Rightarrow x \geqslant \frac{5}{9}$.
Taigi pirmosios dalies ilgis gali būti $\frac{5}{9} \leqslant x < 1$.

16. Pirmosios ir antrosios dalių ilgiai x ir y turi tenkinti tokius sąryšius:
$0 < x + y < 1$, $y = 1{,}25x$.
Iš jų gauname: $0 < 2{,}25x < 1$ arba $0 < x < \frac{4}{9}$, $y = \frac{5}{4}x$.

17. Pirmasis moksleivis $\frac{1}{3}$ teksto surinko per 2 valandas, todėl visą tekstą jis surinktų per 6 valandas. Antrasis moksleivis $\frac{2}{3}$ teksto surinko per 3 valandas, todėl $\frac{1}{3}$ teksto jis surenka per 1,5 h, o visą tekstą — per 4,5 h.

18. Jeigu n — skaičius krūvelių po 4 knygas, o m — skaičius krūvelių po 7 knygas, tai $4n + 7m = 165$. Reikia rasti šios lygties sprendinį su didžiausiu n; tada m bus mažiausias. Pastebėkime, kad m būtinai turi būti nelyginis skaičius, kitaip kairioji lygybės pusė dalytųsi iš 2, o dešinioji ne.
Nagrinėkime lygybę $4n = 165 - 7m$ su nelyginiais m:
kai $m = 1$, tai $165 - 7m = 158$, tačiau 158 nesidalija iš 4;
kai $m = 3$, $165 - 7m = 144 = 4 \cdot 36$.
Taigi daugiausiai gali būti 36 krūvelės po 4 knygas.
Žinoma, uždavinį galima spręsti ir be formulių. Aišku, kad krūvelių po 4 knygas bus ne daugiau kaip $\frac{165}{4}$, t. y. ne daugiau kaip 41. Jeigu imsime
41 krūvelę — liks 1 knyga;
40 — liks 5 knygos;
39 — liks 9 knygos;
38 — liks 13 knygų;
37 — liks 17 knygų;
36 — liks 21 knyga.
Tik dabar likusias knygas galėsime sukrauti po 7.

19. Iš pradžių panagrinėkime, kada duotoji nelygybė virsta lygybe.
Lygties $x + 2 = 0$ sprendinys $x = -2$ neįeina į apibrėžimo sritį.
Sprendžiame lygtį $x^2 + 3\lg^2(x+1) = 0$. Jei $x \neq 0$, tai kairė pusė teigiama (arba neapibrėžta), o štai $x = 0$ tinka.
Kai $x \neq 0$ ir $x > -1$ reiškinys $x^2 + 3\lg^2(x+1)$ yra teigiamas, taigi turime sistemą:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x > -1, \\ \frac{x+2}{3-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; 3).$$

Vadinasi, pradinės nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-1; 3)$.

20. a) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}} = -\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{8}} = -\log_2 \frac{1}{8} = 3$;
b) $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = -\log_3 \log_3 3^{\frac{1}{9}} = -\log_3 \frac{1}{9} = 2$.

21. $\lg(x + 1{,}5) = -\lg x \Rightarrow \lg(x + 1{,}5) + \lg x = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg(x+1{,}5)x = \lg 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + 1{,}5x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0{,}5.$$

22. a) $2\log_{\frac{1}{2}}(1-x) < \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) \Rightarrow \begin{cases} 1 - x > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(1-x)^2 < \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) \end{cases} \Rightarrow$

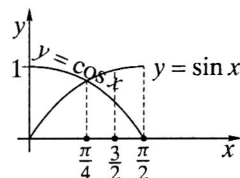
$$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ 3x + 1 > 0, \\ (1-x)^2 > 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < x < 1, \\ x^2 - 5x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\tfrac{1}{3}; 0\right);$$

b) $\log_2 x < \log_2(3x-1) - 2 \Rightarrow \log_2 x + \log_2 4 < \log_2(3x-1) \Rightarrow$

$$\log_2 4x < \log_2(3x-1) \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 3x - 1 > 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < -1. \end{cases}$$

Nelygybė sprendinių neturi.

23. Reiškinio ženklą galime nustatyti iš grafiko:



Kadangi $\frac{\pi}{4} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, tai iš grafiko matyti, kad $\sin\frac{3}{2} > \cos\frac{3}{2}$, t. y. $\sin\frac{3}{2} - \cos\frac{3}{2} > 0$.
Dar geriau apsieiti be grafiko:
$\cos\frac{3}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{2} - 1\right) > 0$, nes $\frac{\pi}{4} < 1{,}5 < \frac{\pi}{2}$.

24. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,
$\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3} = \sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \sin\frac{\pi}{3}$,
$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos x = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin x$,
$\cos x = \sin x$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

25. $\cos(2x)+\sqrt{2}\sin x=1$, $1-\cos(2x)-\sqrt{2}\sin x=0$,
$2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$, $\sin x\cdot(2\sin x-\sqrt{2})=0$.
Lygties $\sin x=0$ sprendiniai $x=m\pi$, $m\in \boldsymbol{Z}$. Iš jų tik su $m=0$ gauname sprendinį $x=0$, priklausantį intervalui $[-3;2]$.
Lygties $2\sin x-\sqrt{2}=0$ sprendiniai $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+n\pi$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Iš jų tik su $n=0$ gauname intervalo $[-3;2]$ sprendinį $\frac{\pi}{4}$. Taigi yra 2 pradinės lygties sprendiniai, priklausantys intervalui $[-3;2]$.

26. Jeigu žiedo plotis yra l, tai jo plotas
$S_{\text{žiedo}}=\pi\cdot(3r+l)^2-\pi\cdot(3r)^2=\pi\cdot(6r+l)\cdot l$.
Žiedo plotį rasime iš lygybės $S_{\text{žiedo}}=7S_{\text{skrit}}$,
$\pi\cdot(6r+l)\cdot l=7\pi r^2$, $7r^2-6rl-l^2=0$, $7\cdot\left(\frac{r}{l}\right)^2-6\cdot\left(\frac{r}{l}\right)-1=0$.
Neigiamas sprendinys netinka, taigi $\frac{r}{l}=1$, $l=r$.

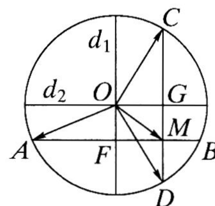
27. $\vec a\cdot(\vec a+\vec b)-(\vec a+\vec b)^2=\vec a^2+\vec a\cdot\vec b-\vec a^2-2\vec a\cdot\vec b-\vec b^2=-\vec a\cdot\vec b-\vec b^2$.
Kai $|\vec a|=3$, $|\vec b|=4$, $\widehat{(\vec a,\vec b)}=120°$,
tai $-\vec a\cdot\vec b-\vec b^2=-3\cdot4\cdot\cos120°-4^2=6-16=-10$.
Atsakymas. -10.

28. Pagal sąlygą $\widehat{(\vec a,\vec b)}=\widehat{(\vec a,\vec m)}$ arba $\widehat{(\vec a,\vec b)}=180°-\widehat{(\vec a,\vec m)}$.
$\cos\widehat{(\vec a,\vec m)}=\frac{\vec a\cdot\vec m}{|\vec a|\cdot|\vec m|}=\frac{\sqrt3+\sqrt3}{\sqrt{1^2+(\sqrt3)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt3)^2+1^2}}=\frac{\sqrt3}{2}$.
Vadinasi, $\widehat{(\vec a,\vec b)}=30°$ arba $\widehat{(\vec a,\vec b)}=180°-30°=150°$.
Atsakymas. $30°$ arba $150°$.

29. Pažymėkime $C(x;y)$. Gauname:
$$\begin{cases}\frac{x+3}{2}=4,\\ \frac{y+1}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5,\\ y=-3.\end{cases}$$
Vadinasi, $C(5;-3)$. Tada $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(5-2)^2+(-3-1)^2}=5$.
Atsakymas. 5.

30. Tegu $\vec m(x;y)$ ir $\frac{x}{3}=\frac{y}{-4}=k$. Tada $x=3k$, $y=-4k$.
$|\vec m|=\sqrt{(3k)^2+(-4k)^2}=5|k|$, $5|k|=10$, $|k|=2$.
Kadangi duotas bukasis kampas, tai $k=-2$. Gauname:
$x=3\cdot(-2)=-6$, $y=-4\cdot(-2)=8$. Taigi $\vec m(-6;8)$.
Atsakymas. $(-6;8)$.

31. Nubrėžiame du apskritimo skersmenis d_1 ir d_2, atitinkamai statmenus stygoms AB ir CD; $d_1\cap AB=F$, $d_2\cap CD=G$. Keturkampis $OFMG$ — stačiakampis ir OM — to stačiakampio įstrižainė, todėl $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}$.
Kadangi $\overrightarrow{OF}=\frac12(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OG}=\frac12(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, tai
$\overrightarrow{OM}=\frac12(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.



IV. STATISTIKA

14. STATISTIKOS ELEMENTAI

14.1. Generalinė aibė ir imtis

Kas yra statistika? Nauja matematikos sritis ar tik duomenų tvarkymo ir analizavimo taisyklių sąvadas?
Tikimybių teorijos ir statistikos santykį galima palyginti su diferencialinio ir integralinio skaičiavimų sąryšiu. Pastarųjų sričių pagrindinis objektas tas pats — funkcijos. Tačiau skiriasi požiūriai į jas: vienu atveju mums rūpi funkcijų išvestinės, kitu atveju — pirmykštės funkcijos (integralai).
Tikimybių teorijos ir statistikos pagrindinis objektas irgi tas pats — bandymai (arba reiškiniai), kurių baigtys priklauso nuo atsitiktinumų. Tačiau tikimybių teorijos ir statistikos uždaviniai formuluojami skirtingai. Skirtumus galima paaiškinti tokiu pavyzdžiu:
Tarkime, kad moneta simetriška. Kokia tikimybė, kad metus monetą 100 kartų atvirtusių herbų skaičius priklausys intervalui (45; 55)? Toks klausimas būdingas tikimybių teorijai. O dabas suformuluokime statistikai būdingą klausimą: metus monetą 100 kartų herbas atvirto 46 kartus. Ar teisinga manyti, kad moneta yra simetriška?
Taigi tikimybių teorijoje bandymo aplinkybės yra žinomos, remiantis jomis bandoma numatyti, kokie įvykiai labiau, kokie menkiau tikėtini atlikus bandymą. Statistikoje remiantis tuo, kas jau įvyko (pavyzdžiui, surinktais duomenimis) bandoma daryti išvadas apie bandymo aplinkybes.
Taigi tikimybių teorijoje remiantis reiškinio savybėmis bandoma numatyti, kas įvyks, o statistikoje — remiantis žiniomis apie tai, kas įvyko, bandoma daryti išvadas apie reiškinio savybes.
„Žinios apie tai, kas įvyko" arba gautieji duomenys statistikoje nusakomi atsitiktinės imties sąvoka. Žinoma, ne kiekviena duomenų sankaupa yra atsitiktinė imtis. Viena vertus, duomenų gavimo būdas tikrai turi būti atsitiktinis, kita vertus, visi tie duomenys turi būti apie tą patį reiškinio požymį.

14.2. Dažniai ir diagramos

Taigi statistikos uždavinio sprendimas prasideda nuo duomenų rinkimo, t. y. atsitiktinės imties sudarymo. Kaip ir kiekvieną turtą — gautuosius duomenis — reikia pirmiausia tinkamai sutvarkyti. Skyrelyje nagrinėjama, kaip tie duomenys tvarkomi ir vaizduojami remiantis dažnių lentelėmis ir diagramomis. Galima prisiminti, kad dažnių lentelės jau buvo pasirodžiusios anksčiau — nagrinėjant atsitiktinių dydžių skirstinius. Tada tos lentelės buvo vadinamos empiriniais atsitiktinio dydžio skirstiniais.

Suvokiame ir žinome:

kas yra dažnių (santykinių dažnių) lentelė;

kas yra stulpelinė ir skritulinė diagramos;

kas yra sugrupuotų imčių santykinių dažnių lentelė ir diagrama.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelyje pateiktos trys užduotys, kurios skirtos tam pačiam tikslui — mokytis sudaryti dažnių lenteles ir vaizduoti duomenis diagramomis. Kad jas atlikdami sugaištume mažiau laiko, galima jas pasiūlyti atlikti grupėmis. Grupių atstovai galėtų trumpai papasakoti apie atliktą užduotį.

1. a) 1) 12^a: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10;
12^b: 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10;

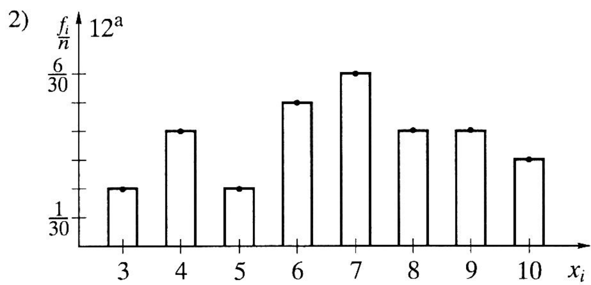
12^a:

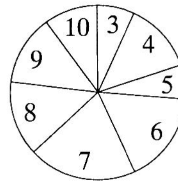
$x_i =$	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_i =$	2	4	2	5	6	4	4	3
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$

12^b:

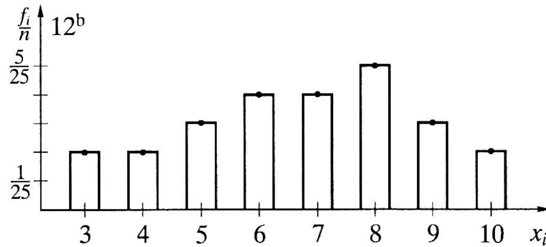
$x_i =$	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_i =$	2	2	3	4	4	5	3	2
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$

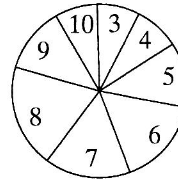
2)





Nurodymas. Vaizduojant imtį skrituline diagrama, iš pradžių reikėtų apskaičiuoti, kokio dydžio kampą atitinka 1 imties reikšmė: $\frac{360°}{30} = 12°$ (imties didumas — 30). Tuomet dažnį 2 atitinka 24°, 3 – 36°, 4 – 48°, 5 – 60° ir t. t. Atidėję atitinkamo dydžio sektorius skritulyje, gausime imties skritulinę diagramą.





3) 12^a:

Intervalas	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
Dažnis f_i =	2	6	11	11
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n}$ =	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{11}{30}$

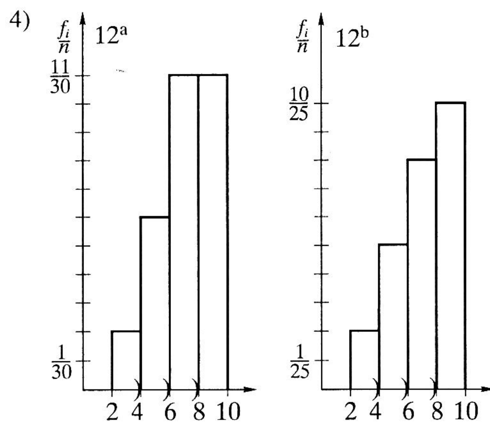
12^b:

Intervalas	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
Dažnis f_i =	2	5	8	10
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n}$ =	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{10}{25}$

Pastabos. 1. Dalijimo intervalus galima imti, pavyzdžiui, ir tokius: [2; 4], (4; 6], (6; 8], (8; 10]. Tada bus kitokia ir histograma.

2. Paprastai braižant histogramas stulpelių aukščiai parenkami taip, kad stulpelių plotai būtų lygūs atitinkamiems santykiniams dažniams. Mūsų brėžiniuose stulpelių aukščiai tiesiog yra lygūs dažniams. Jeigu norėtume, kad santykiniams dažniams būtų lygūs stulpelių plotai, turėtume imti $\frac{f_i}{2n}$ aukščio stulpelius.

4)



b) 1) 12^a: 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10;
12^b: 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10;

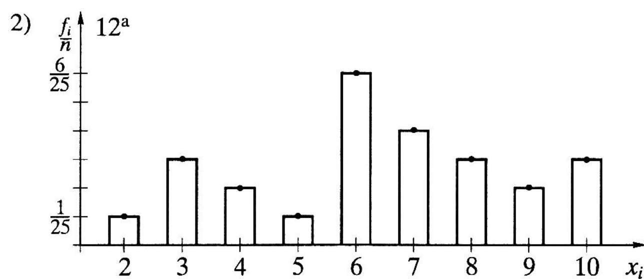
12^a:

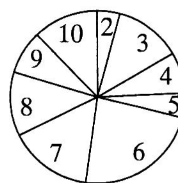
x_i =	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i =	1	3	2	1	6	4	3	2	3
$\frac{f_i}{n}$ =	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$

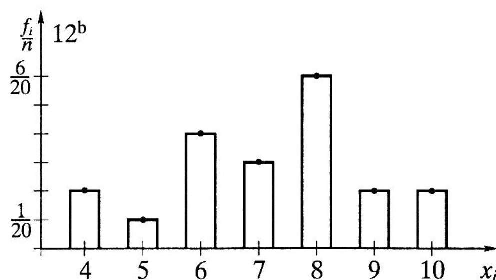
12^b:

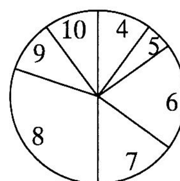
x_i =	4	5	6	7	8	9	10
f_i =	2	1	4	3	6	2	2
$\frac{f_i}{n}$ =	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$

2)









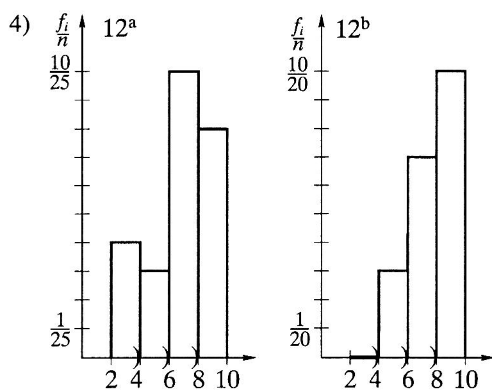
3) 12^a:

Intervalas	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
Dažnis $f_i =$	4	3	10	8
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{8}{25}$

12^b:

Intervalas	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
Dažnis $f_i =$	0	3	7	10
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n} =$	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{10}{20}$

4)



c) 1) 12^a: 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10;
12^b: 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10;

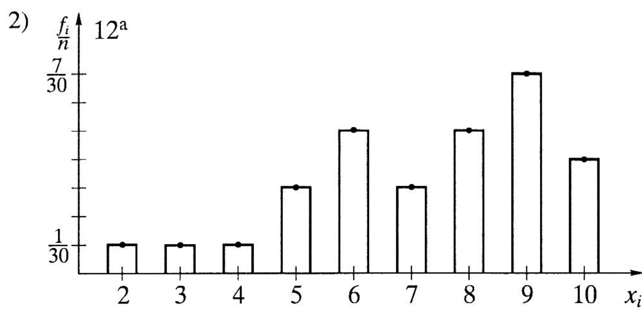
12^a:

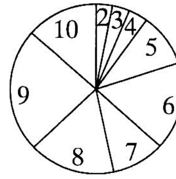
$x_i =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_i =$	1	1	1	3	5	3	5	7	4
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{30}$

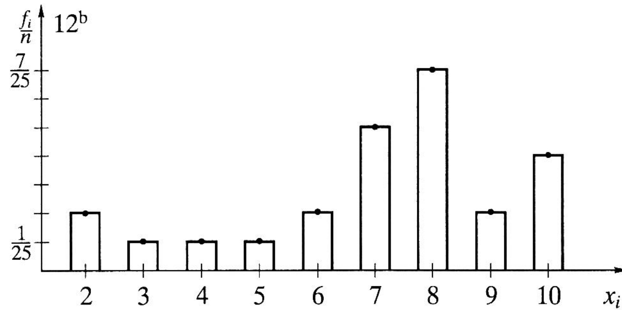
12^b:

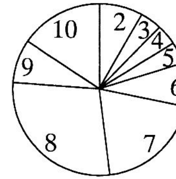
$x_i =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_i =$	2	1	1	1	2	5	7	2	4
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$

2)









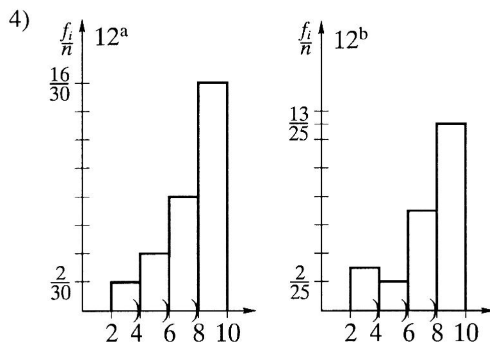
3) 12[a]:

Intervalas	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
Dažnis $f_i =$	2	4	8	16
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{16}{30}$

12[b]:

Intervalas	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
Dažnis $f_i =$	3	2	7	13
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{13}{25}$

4)



2. 1) IX:

Intervalas	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
Dažnis $f_i =$	6	7	14	13	5	5
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{14}{50}$	$\frac{13}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{5}{50}$

X:

Intervalas	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)	[18; 21)
Dažnis $f_i =$	6	7	19	12	3	3
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{3}{50}$

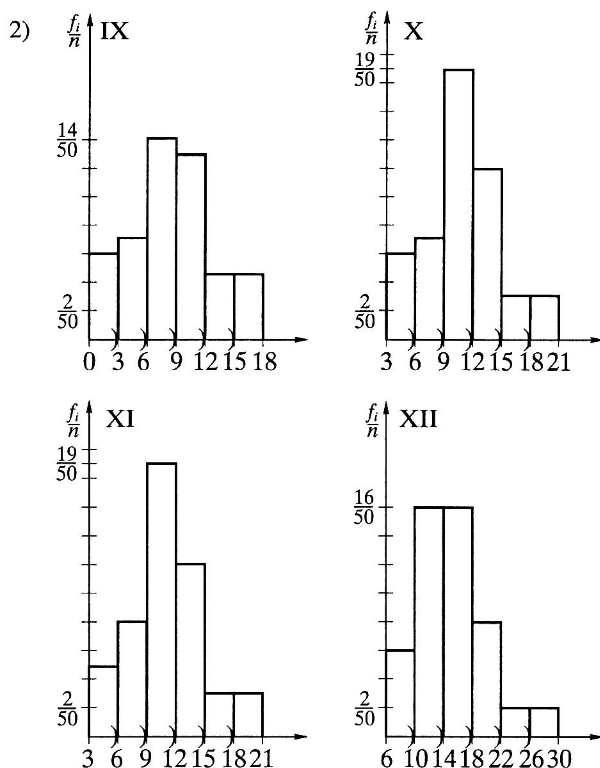
XI:

Intervalas	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)	[18; 21)
Dažnis $f_i =$	5	8	19	12	3	3
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{5}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{3}{50}$

XII:

Intervalas	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Dažnis $f_i =$	6	16	16	8	2	2
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{6}{50}$	$\frac{16}{50}$	$\frac{16}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$

2)



3) *Nurodymas.* Išvados gali būti įvairios. Tačiau neabejotinai matyti, kad mažiausiai laiko ruošdami pamokas užtrunka devintokai, o daugiausiai — dvyliktokai. Dešimtokai ir vienuoliktokai pamokų ruošimui per savaitę skiria maždaug tiek pat laiko.

3. 1) Dažnių lentelė:

Birželio mėn.

$x_i =$	s	a	l
$f_i =$	11	10	9

Liepos mėn.

$x_i =$	s	a	l
$f_i =$	15	11	5

Rugpjūčio mėn.

$x_i =$	s	a	l
$f_i =$	6	13	12

Santykinių dažnių lentelė:

Birželio mėn.

$x_i =$	s	a	l
$f_i =$	11	10	9
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{11}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{9}{30}$

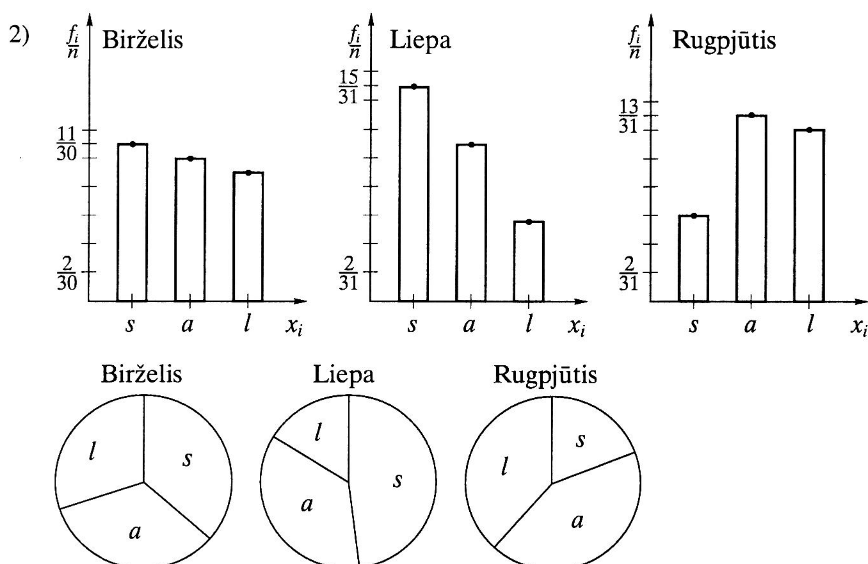
Liepos mėn.

$x_i =$	s	a	l
$f_i =$	15	11	5
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{15}{31}$	$\frac{11}{31}$	$\frac{5}{31}$

Rugpjūčio mėn.

$x_i =$	s	a	l
$f_i =$	6	13	12
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{6}{31}$	$\frac{13}{31}$	$\frac{12}{31}$

2)



3) a) Liepa; b) rugpjūtis; c) rugpjūtis.

14.3. Imties moda, mediana ir kvartiliai

Dažnių lentelė parodo, kaip dažnai imtyje pasitaikė viena ar kita reikšmė. Iš lentelės iš karto matome, kokia reikšmė (ar kelios reikšmės) pasitaikė dažniausiai. Tai imties moda (arba kelios modos).
Kai imties duomenys skaitiniai, juos galima įsivaizduoti, kaip „taškų“ sankaupą ant tiesės. Tos sankaupos „sklaidos“ ant tiesės savybes galima nusakyti nurodant taškus, kurie tarsi skaido imtį ketvirčiais: atkerta ketvirtį mažiausiųjų, pusę mažiausiųjų, tris ketvirčius. Šitaip galima paaiškinti kvartilių sąvokos esmę. Skyrelyje nėra griežtų apibrėžimų ir formalių radimo taisyklių. Tačiau reikia įdėmiai išnagrinėti pirmąjį ir antrąjį pavyzdžius. Galbūt kam nors kils mintis, kad tas taisykles, kurios iliustruotos šiais pavyzdžiais, galima pakeisti ir imties skaidymui penktadaliais, šeštadaliais, dešimtadaliais...

Suvokiame ir žinome:
modos, medianos ir kvartilių sąvokų prasmę;
modos, medianos ir kvartilių radimo taisykles.

Mokame rasti duotosios skaitinės imties modą, medianą, kvartilius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Visose užduotyse reikalaujama to paties. Jeigu kvartilių radimo taisyklės paaiškėjo atlikus vieną užduotį, to ir užtenka.

4. a) Sutvarkę imtį sudarykime jos dažnių lentelę:

$x_i =$	$+3$	$+5$	$+6$	$+7$
$f_i =$	2	2	3	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$f_1 + \cdots + f_i =$	2	4	7	8
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

Pastaba. Spręsdami a) punktą sudarėme imties duomenų dažnių ir santykinių dažnių lentelę. Tačiau uždaviniui išspręsti pakanka tik santykinių dažnių (b)–d) punktai) lentelės.

Iš lentelės randame modą — dažniausiai pasitaikantį duomenį: $M_o = +6$. (Kai imtis nedidelė, modą nesunkiai galima nustatyti ir be lentelių, ir net nesutvarkius imties.)
Norėdami rasti pirmąjį kvartilį, sukauptųjų santykinių dažnių eilutėje ieškome reikšmės $\frac{1}{4}$. Kadangi sukauptasis santykinis dažnis $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ parašytas po duomeniu $+3$, tai $Q_1 = \frac{+3+(+5)}{2} = +4$. Analogiškai randame imties medianą: kadangi sukauptasis santykinis dažnis $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ parašytas po duomeniu $+5$, tai $M_d = \frac{+5+(+6)}{2} = +5{,}5$. Norėdami rasti trečiąjį kvartilį, ieškome sukauptojo santykinio dažnio, lygaus $\frac{3}{4}$. Tokio nėra, tačiau $\frac{4}{8} < \frac{3}{4}$, $\frac{7}{8} > \frac{3}{4}$. Taigi pirmasis imties duomuo, kurio sukauptasis santykinis dažnis yra didesnis už $\frac{3}{4}$, lygus $+6$. Tai ir yra trečiasis kvartilis: $Q_3 = +6$.
Analogiškai sprendžiame ir b)–d) punktus:

b)

$x_i =$	$+10$	$+14$	$+15$	$+16$	$+18$	$+19$
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

$M_o = +15$ ir $M_o = +18$, $Q_1 = +14{,}5$, $M_d = +15{,}5$, $Q_3 = +18$;

c)

$x_i =$	-5	-4	-3	0	$+1$	$+2$	$+3$
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

$M_o = -4$, $Q_1 = -4$, $M_d = -1{,}5$, $Q_3 = +1{,}5$;

d)

$x_i =$	-10	-9	-8	-6	-5
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

$M_o = -8$, $Q_1 = -9{,}5$, $M_d = -8$, $Q_3 = -7$.

5. *Nurodymas.* Dažniausiai pasitaikantis pažymys — tai imties moda. Sprendimas analogiškas 4 uždavinio sprendimui.
a) $M_o = M_d = 8$, $Q_1 = 7{,}5$, $Q_3 = 9{,}5$;
b) $M_o = M_d = 9$, $Q_1 = 8$, $Q_3 = 9$;
c) $M_o = M_d = 9$, $Q_1 = 7{,}5$, $Q_3 = 9{,}5$;
d) $M_o = 9$, $M_d = 8{,}5$, $Q_1 = 7$, $Q_3 = 9$;
e) $M_o = 8$ ir $M_o = 9$, $M_d = 8$, $Q_1 = 6{,}5$, $Q_3 = 9$;
f) $M_o = 8$ ir $M_o = 10$, $M_d = 8$, $Q_1 = 6$, $Q_3 = 9{,}5$.

6. a) $M_o = M_d = 3$, $Q_1 = 3$, $Q_3 = 5$;
b) $M_o = 1$ ir $M_o = 2$, $M_d = 1$, $Q_1 = 1$, $Q_3 = 2$;
c) imtis modos neturi, $M_d = 4$, $Q_1 = 2$, $Q_3 = 6$;
d) $M_o = 9$ ir $M_o = 10$, $M_d = 9$, $Q_1 = 5$, $Q_3 = 10$;
e) $M_o = 0$, $M_o = 1$ ir $M_o = 2$, $M_d = 1$, $Q_1 = 0$, $Q_3 = 2$;
f) $M_o = 1$ ir $M_o = 3$, $M_d = 2$, $Q_1 = 1$, $Q_3 = 3$.

7. a) $M_o = 42$, $M_o = 43$, $M_o = 44$ ir $M_o = 45$, $M_d = 43$, $Q_1 = 42$, $Q_3 = 44$;
b) $M_o = M_d = 44$, $Q_1 = 43$, $Q_3 = 45$;
c) $M_o = 42$, $M_d = 42{,}5$, $Q_1 = 42$, $Q_3 = 43$;
d) $M_o = 41$, $M_d = 42$, $Q_1 = 41$, $Q_3 = 44$;
e) $M_o = 43$, $M_d = 43{,}5$, $Q_1 = 43$, $Q_3 = 44$;
f) $M_o = M_d = 43$, $Q_1 = 42$, $Q_3 = 44$.

8. a) Atsitiktinio dydžio moda — didžiausią tikimybę turinti reikšmė: $M_o = 2$. Norėdami rasti kvartilius ir medianą, papildykime skirstinio lentelę eilute $p_1 + \cdots + p_i$:

$x_i =$	-2	0	2	3	4	5
$p_i =$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1
$p_1 + \cdots + p_i =$	0,1	0,3	0,6	0,8	0,9	1

Norėdami rasti pirmąjį kvartilį, ieškome sukauptosios tikimybės, lygios $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Tokios nėra, tačiau $0{,}1 < 0{,}25$, $0{,}3 > 0{,}25$. Taigi pirmasis imties duomuo, kurio sukauptoji tikimybė yra didesnė už 0,25, lygus 0. Tai ir yra pirmasis kvartilis: $Q_1 = 0$. Analogiškai randame ir atsitiktinio dydžio medianą bei trečiąjį kvartilį: $M_d = 2$, $Q_3 = 3$.
Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai:
b) $M_o = M_d = Q_1 = 3$, $Q_3 = 6$;
c) $M_o = Q_1 = -1$, $M_d = 0{,}5$, $Q_3 = 4$;
d) $M_o = Q_1 = -3$, $M_d = 0$, $Q_3 = 2$.

9. Atsakyti į klausimus galima remiantis jau spręstais uždaviniais, pvz., 8 uždavinio punktas b): $M_o = M_d = Q_1$.
Panagrinėkime brėžinyje pavaizduotą imtį, kai $n = 5$. Iškart randame modą: $M_o = 2$. Sudarykime santykinių dažnių lentelę:

$x_i =$	1	2	3	4
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

Randame pirmąjį kvartilį: $Q_1 = 2$ $\left(\frac{1}{5} < \frac{1}{4}, \frac{3}{5} > \frac{1}{4}\right)$
ir medianą: $M_d = 2$ $\left(\frac{3}{5} > \frac{1}{2}\right)$.
Matome, kad $M_o = Q_1 = M_d$.
Analogiškai sprendžiame, kai $n = 6$:
$M_o = 3$, $Q_1 = 2$ $\left(\frac{1}{6} < \frac{1}{4}, \frac{2}{6} > \frac{1}{4}\right)$, $M_d = 3$ $\left(\frac{2}{6} < \frac{1}{2}, \frac{4}{6} > \frac{1}{2}\right)$. Taigi šiuo atveju $M_o = M_d = 3$.
Pateikiame pavyzdį imties, kurios $M_o = M_d = Q_3$:

$x_i =$	1	2	3	4
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

14.4. Imties vidurkis ir dispersija

Priminkime, kaip skaičiavome atsitiktinių dydžių vidurkius ir dispersijas. Skaičiuodami juos naudojomės atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybėmis. Imtį sudaro atsitiktinio dydžio reikšmės, gautos iš nepriklausomų stebėjimų. Tos reikšmių tikimybės nežinomos, tačiau galima apskaičiuoti santykinius imčių dažnius. Remiantis tais dažniais ir skaičiuojamas vidurkis. Arba — tiesiog sumuojamos gautosios reikšmės ir dalijama iš stebėjimų skaičiaus. Pabrėžkime, kad šitaip gaunamas ne stebimo atsitiktinio dydžio vidurkis, bet tikėtina — artima jam reikšmė (kai atlikta daug stebėjimų). Todėl gautasis skaičius vadinamas ne atsitiktinio dydžio, bet imties vidurkiu. Jei sudarytume dvi to paties atsitiktinio dydžio imtis, sudarytas iš vienodo kiekio duomenų, ir apskaičiuotume imčių vidurkius, gautosios reikšmės tikriausiai skirtųsi. Tačiau tai nėra keista — juk du kartus matuojant tą patį atstumą irgi dažniausiai gaunami šiek tiek besiskiriantys to paties dydžio artiniai.

Taigi vienintelis atsitiktinio dydžio vidurkio ir imties vidurkio skaičiavimo skirtumas — pastaruoju atveju vietoj nežinomų tikimybių naudojami santykiniai dažniai. Tačiau dispersijų skaičiavimas skiriasi labiau. Juk turint vien stebėtas atsitiktinio dydžio reikšmes negalima nustatyti tikslios atsitiktinio dydžio vidurkio reikšmės, taigi vietoj jos turime naudoti imties vidurkį, t. y. atsitiktinio dydžio vidurkio artinį. Nenuostabu, kad šis pasikeitimas sukelia dar vieną — vardiklyje bandymų skaičius n keičiasi į $n-1$.

Suvokiame ir žinome:

imties vidurkio ir dispersijos prasmę;

imties vidurkio ir dispersijos ryšį su atsitiktinio dydžio vidurkiu ir dispersija.

Mokame:

naudotis imties vidurkio ir dispersijos skaičiavimo formulėmis;

atlikti skaičiavimus naudojantis skaičiuoklio statistinėmis funkcijomis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Visus skyrelyje pateiktus uždavinius patogu spręsti naudojantis skaičiuokliu. Tačiau nors vieną, geriausiai pirmąjį (10a), skyrelio pratimą rekomenduojame išspręsti remiantis imties vidurkio, dispersijos bei standartinio nuokrypio formulėmis.

10. a) Vidutinė temperatūra yra $\frac{2\cdot3+2\cdot5+3\cdot6+7}{8} = +5{,}125$.
Apskaičiuokime imties dispersiją:
$s^2 = \frac{2\cdot(3-5{,}125)^2+2\cdot(5-5{,}125)^2+3\cdot(6-5{,}125^2)+(7-5{,}125)^2}{8-1} = 2{,}125.$
Tada imties standartinis nuokrypis $s = \sqrt{2{,}125} \approx 1{,}46$;
b) $\bar{x} = +0{,}75$, $s \approx 1{,}49$;
c) $\bar{x} = -4$, $s \approx 2{,}14$;
d) $\bar{x} = +15{,}625$, $s \approx 2{,}88$.
Temperatūros išsisklaidymas apie vidurkį didžiausias toje matavimų serijoje, kurios standartinis nuokrypis yra didžiausias, t. y. d); mažiausias — kurios standartinis nuokrypis mažiausias, t. y. a).

11. a) 12^{a} — $\bar{x} \approx 7{,}86$, $s^2 \approx 3{,}06$, $s \approx 1{,}75$;
12^{b} — $\bar{x} \approx 8{,}58$, $s^2 \approx 0{,}992$, $s \approx 0{,}996$;
12^{c} — $\bar{x} \approx 8{,}0625$, $s^2 \approx 3{,}4$, $s \approx 1{,}84$.
Didžiausias pažymių vidurkis 12^{b}. Moksleivių žinių įvertinimai mažiausiai išsisklaidę apie vidurkį taip pat 12^{b}.
b) 12^{a} — $\bar{x} \approx 7{,}8$, $s^2 \approx 3{,}42$, $s \approx 1{,}85$;
12^{b} — $\bar{x} \approx 7{,}5$, $s^2 \approx 3{,}18$, $s \approx 1{,}78$;
12^{c} — $\bar{x} \approx 7{,}3$, $s^2 \approx 6{,}2$, $s \approx 2{,}498$.
Didžiausias pažymių vidurkis 12^{a}. Moksleivių žinių įvertinimai mažiausiai išsisklaidę apie vidurkį 12^{b}.

12. I sav. — $\bar{x} \approx 3{,}6$, $s \approx 1{,}1$;
II sav. — $\bar{x} \approx 1{,}3$, $s \approx 0{,}76$;
III sav. — $\bar{x} = 4$, $s \approx 2{,}16$;
IV sav. — $\bar{x} \approx 1{,}6$, $s \approx 1{,}72$.
Labiausiai apie vidurkį svyravo III savaitės kiekvieną dieną parduotų automobilių skaičius.

13. a) $\bar{x} = 42{,}9$, $s \approx 1{,}66$; b) $\bar{x} = 43{,}8$, $s \approx 1{,}32$; c) $\bar{x} = 42{,}6$, $s \approx 0{,}97$;
d) $\bar{x} = 42{,}4$, $s \approx 1{,}78$; e) $\bar{x} = 43{,}4$, $s \approx 1{,}43$; f) $\bar{x} = 42{,}8$, $s \approx 1{,}62$.
Didžiausia dispersija yra tos grupės, kurios didžiausias standartinis nuokrypis, t. y. grupės d); mažiausia dispersija yra tos grupės, kurios mažiausias standartinis nuokrypis, t. y. grupės c).

14.5. Požymių koreliacija

Visų pirma aptarkime problemą. Imties sudarymas dažnai nėra paprastas ir nereikalaujantis išlaidų darbas (pavyzdžiui, gyventojų apklausa ar kokios nors produkcijos kokybės tyrimas). Taigi jeigu jau tiriami tam tikri objektai, dažnai nustatomos ne vieno, bet kelių su tuo pačiu objektu susijusių dydžių reikšmės. Kai dydžiai yra du ar daugiau, natūraliai kyla klausimas, ar jie yra susiję, koks jų ryšio pobūdis. Pavyzdžiui, galima klausti, ar vienam didėjant kitas proporcingai didėja (mažėja), t. y. ar ryšys yra panašus į tiesinį. Skyrelio pavyzdžiais stengtasi parodyti, kaip apie sąryšio pobūdį galima spręsti iš duomenų sklaidos diagramų. Tačiau kai duomenų daug — vaizduoti sklaidos diagramas sudėtinga, kita vertus jos tik suteikia įspūdį, bet nepateikia ryšio kiekybinio įvertinimo. Tą kiekybinį vertinimą duoda koreliacijos koeficientas.

Nuostabu, kad į klausimą, ar ryšys tarp dviejų atsitiktinių dydžių panašus į tiesinį, galima atsakyti nurodant skaičių, moduliu neviršijantį vieneto.

Suvokiame ir žinome:

teigiamo, neigiamo koreliuotumo, nekoreliuotumo sąvokų prasmę;

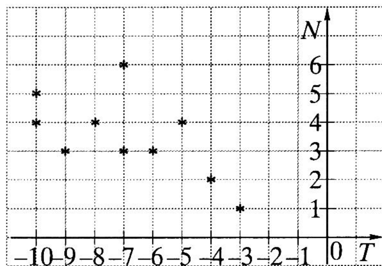
koreliacijos koeficiento skaičiavimo formulę.

Mokame turint dviejų atsitiktinių dydžių imtį apskaičiuoti koreliacijos koeficiento reikšmę ir interpretuoti rezultatą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

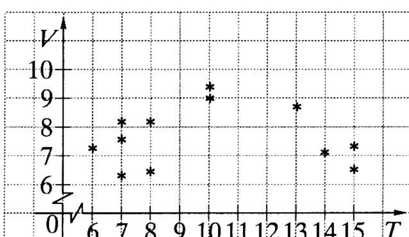
Skyrelyje yra tik du uždaviniai. Tačiau jeigu norite didesnio pasirinkimo — atverskite puslapį su skyriaus kartojimo uždaviniais. Išsprendus vieną iš 4–6 uždavinių iki galo galima pakartoti svarbiausias skyrelio sąvokas.

14. *Nurodymas.* Koreliacijos koeficientą apskaičiuojame pagal vadovėlyje pateiktą formulę (p. 30), o dydžius $\overline{T}$, $\overline{N}$, s_T ir s_N randame naudodamiesi skaičiuokliu. Dydžių T ir N sandaugų suma lygi -261. Skaičiuokliu apskaičiavę gauname:
$\overline{T} = -6{,}9$, $s_T \approx 2{,}42$; $\overline{N} = 3{,}5$, $s_N \approx 1{,}43$.
Taigi $r = \frac{-261-10\cdot(-6{,}9)\cdot 3{,}5}{9\cdot 2{,}42\cdot 1{,}43} \approx -0{,}63$.
Nubraižykime duomenų sklaidos diagramą:



Galima teigti, kad ryšys tarp dydžių T ir N primena tiesinę priklausomybę. Tokią išvadą galima padaryti ir iš to, kad $|r| = 0{,}63$ (gana didelė koreliacijos koeficiento modulio reikšmė).

15. Uždavinys analogiškas 14 uždaviniui.
Dydžių T ir V sandaugų suma lygi 917,5;
$\overline{T} = 10$, $s_T \approx 3{,}38$; $\overline{V} \approx 7{,}66$, $s_V \approx 0{,}98$.
Tada $r = \frac{917{,}5-12\cdot 10\cdot 7{,}66}{11\cdot 3{,}38\cdot 0{,}98} \approx -0{,}047$.
Kadangi $r < 0$ ($r \neq -1$), tai sklaidos diagramos taškai yra išsidėstę apie tiesę, kurios krypties koeficientas neigiamas. Kadangi r pakankamai daug skiriasi nuo -1, tai išsisklaidymas apie tokią tiesę turėtų būti gana didelis. Todėl manome, kad tarp dydžių T ir V nėra panašaus į tiesinę priklausomybę ryšio. Nubraižykite duomenų sklaidos diagramą ir pasvarstykite, ar pagrįsti tokie samprotavimai.



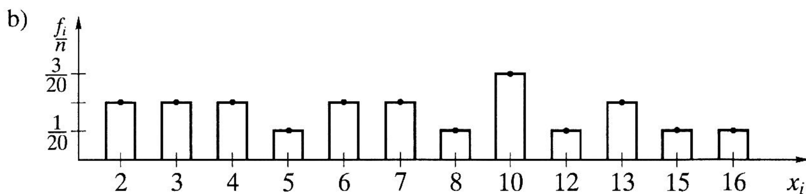
15. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

Pastaba. Vadovėlyje pateikti neteisingi 4c ir 16 uždavinių atsakymai.

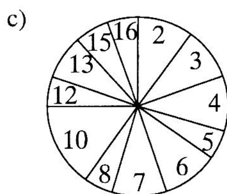
1. *A*: a)

$x_i =$	2	3	4	5	6	7	8	10	12	13	15	16
$f_i =$	2	2	2	1	2	2	1	3	1	2	1	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
$f_1 + \cdots + f_i =$	2	4	6	7	9	11	12	15	16	18	19	20
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{19}{20}$	1

b)



c)

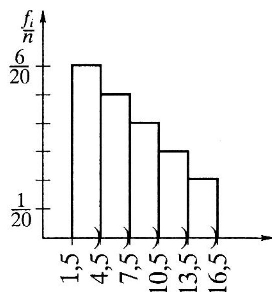


Nurodymas. Kiekvienas iš duomenų 5, 8, 12, 15 ir 16 atitiks $\frac{1}{20} \cdot 360° = 18°$ centrinį kampą; 2, 3, 4, 6, 7 ir 13 — 36° centrinį kampą; 10 — 54° centrinį kampą.

d) $M_o = 10$, $M_d = 7$, $Q_1 = 4$, $Q_3 = 11$;

e)

Intervalas	[1,5; 4,5)	[4,5; 7,5)	[7,5; 10,5)	[10,5; 13,5)	[13,5; 16,5)
$f_i =$	6	5	4	3	2
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{6}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$

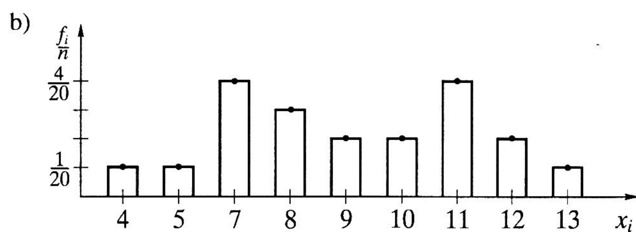


f) $\bar{x}_A = 7{,}8$; g) $s_A \approx 4{,}37$.

B: a)

$x_i =$	4	5	7	8	9	10	11	12	13
$f_i =$	1	1	4	3	2	2	4	2	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$
$f_1 + \cdots + f_i =$	1	2	6	9	11	13	17	19	20
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{19}{20}$	1

b)

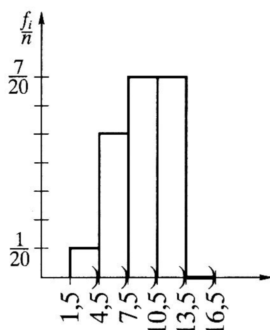


c) *Nurodymas.* Kiekvienas iš duomenų 4, 5 ir 13 atitiks $\frac{1}{20} \cdot 360° = 18°$ centrinį kampą; 7 ir 11 — 72° centrinį kampą; 8 — 54° centrinį kampą; 9, 10 ir 12 — 36° centrinį kampą.

d) $M_o = 7$ ir $M_o = 11$, $M_d = 9$, $Q_1 = 7$, $Q_3 = 11$;

e)

Intervalas	[1,5; 4,5)	[4,5; 7,5)	[7,5; 10,5)	[10,5; 13,5)	[13,5; 16,5)
$f_i =$	1	5	7	7	0
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	0

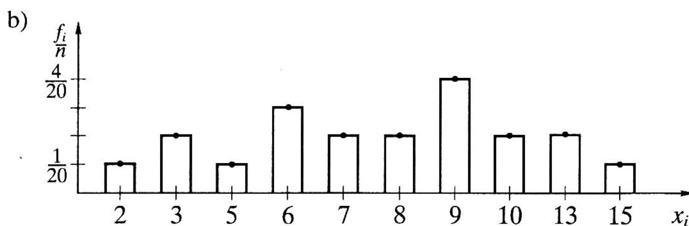


f) $\bar{x}_B = 9$; g) $s_B \approx 2{,}43$.

C: a)

$x_i =$	2	3	5	6	7	8	9	10	13	15
$f_i =$	1	2	1	3	2	2	4	2	2	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$
$f_1 + \cdots + f_i =$	1	3	4	7	9	11	15	17	19	20
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{19}{20}$	1

b)

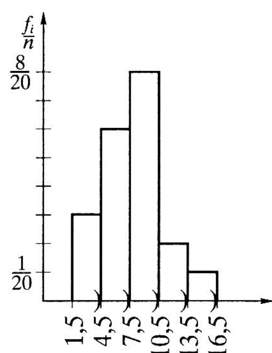


c) *Nurodymas.* Kiekvienas iš duomenų 2, 5 ir 15 atitiks $\frac{1}{20} \cdot 360° = 18°$ centrinį kampą; 3, 7, 8, 10 ir 13 — 36° centrinį kampą; 6 — 54° centrinį kampą; 9 — 72° centrinį kampą.

d) $M_o = 9$, $M_d = 8$, $Q_1 = 6$, $Q_3 = 9{,}5$;

e)

Intervalas	[1,5; 4,5)	[4,5; 7,5)	[7,5; 10,5)	[10,5; 13,5)	[13,5; 16,5)
$f_i =$	3	6	8	2	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$

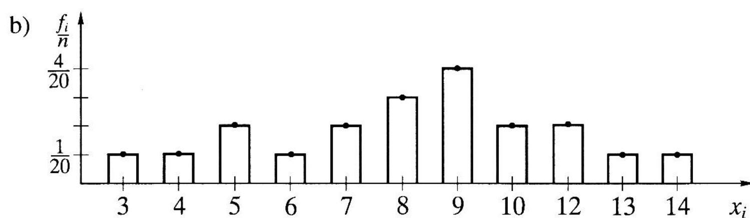


f) $\bar{x}_C = 7{,}9$; g) $s_C \approx 3{,}401$.

D: a)

$x_i =$	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14
$f_i =$	1	1	2	1	2	3	4	2	2	1	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
$f_1 + \cdots + f_i =$	1	2	4	5	7	10	14	16	18	19	20
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{19}{20}$	1

b)

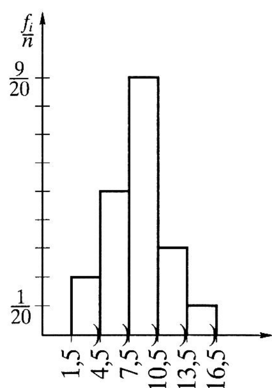


c) *Nurodymas.* Kiekvienas iš duomenų 3, 4, 6, 13 ir 14 atitiks 18° centrinį kampą; 5, 7, 10 ir 12 — 36° centrinį kampą; 8 — 54° centrinį kampą; 9 — 72° centrinį kampą.

d) $\text{M}_\text{o} = 9$, $\text{M}_\text{d} = 8{,}5$, $\text{Q}_1 = 6{,}5$, $\text{Q}_3 = 11$;

e)

Intervalas	[1,5; 4,5)	[4,5; 7,5)	[7,5; 10,5)	[10,5; 13,5)	[13,5; 16,5)
$f_i =$	2	5	9	3	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$



f) $\bar{x}_D = 8{,}4$; g) $s_D \approx 2{,}963$.

h) Kadangi bulvių veislės *B* imties vidurkis yra didžiausias ir šios veislės bulvių imties standartinis nuokrypis mažiausias, tai ūkininkui siūlytume rinktis veislės *B* bulves.

2. a) Liepa:

$x_i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	20
$f_i =$	3	1	5	3	2	1	2	2	2	5	1	1	2	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{3}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{5}{31}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{5}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{31}$
$f_1 + \cdots + f_i =$	3	4	9	12	14	15	17	19	21	26	27	28	30	31
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{3}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{9}{31}$	$\frac{12}{31}$	$\frac{14}{31}$	$\frac{15}{31}$	$\frac{17}{31}$	$\frac{19}{31}$	$\frac{21}{31}$	$\frac{26}{31}$	$\frac{27}{31}$	$\frac{28}{31}$	$\frac{30}{31}$	1

Rugpjūtis:

$x_i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	17
$f_i =$	1	3	3	5	3	1	1	3	2	2	2	2	1	1	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{31}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{5}{31}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{31}$
$f_1 + \cdots + f_i =$	1	4	7	12	15	16	17	20	22	24	26	28	29	30	31
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{12}{31}$	$\frac{15}{31}$	$\frac{16}{31}$	$\frac{17}{31}$	$\frac{20}{31}$	$\frac{22}{31}$	$\frac{24}{31}$	$\frac{26}{31}$	$\frac{28}{31}$	$\frac{29}{31}$	$\frac{30}{31}$	1

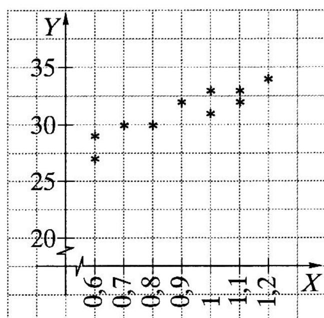
b) Liepą vyrauja 3 m/s ir 10 m/s vėjas, o rugpjūtį — 4 m/s vėjas.
c) Liepa: $Q_1 = 3$, $M_d = 7$, $Q_3 = 10$; rugpjūtis: $Q_1 = 4$, $M_d = 6$, $Q_3 = 10$.
d) Liepą vidutinis vėjo greitis yra maždaug 7,1 m/s, o rugpjūtį — maždaug 7,0 m/s.
e) Liepa: $s \approx 4{,}66$; rugpjūtis: $s \approx 4{,}25$.

3. a) 34,92; b) $\approx 41{,}243$;
c)

Intervalas	[22; 27)	[27; 32)	[32; 37)	[37; 42)	[42; 47]
$f_i =$	3	4	9	6	3
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{25}$

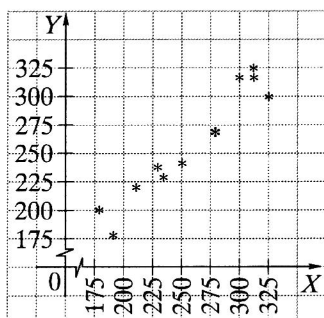
Daugiausiai elementų priklauso intervalui [32; 37).

4. a)



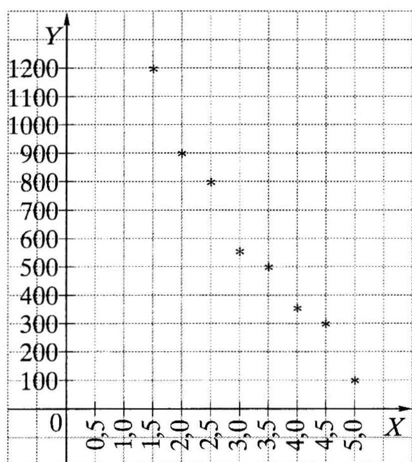
b) $\bar{x} = 0{,}9$, $\bar{y} = 31{,}1$, $s_x \approx 0{,}216$, $s_y \approx 2{,}132$;
c) $r \approx 0{,}92$.

5. a)



b) $\bar{x} = 258,(3)$, $\bar{y} = 259{,}58(3)$, $s_x \approx 49{,}559$, $s_y \approx 49{,}104$;
c) $r \approx 0{,}96$.

6. a)



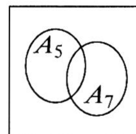
b) $\bar{x} = 3{,}25$, $\bar{y} = 587{,}5$, $s_x \approx 1{,}225$, $s_y \approx 359{,}315$;
c) $r \approx -0{,}98$.

7. *I būdas.* Suskaičiuokime, kiek yra natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, kurie dalijasi iš 5: kadangi iš 5 dalijasi kas penktas skaičius, tai nuo 1 iki 1000 tokių skaičių yra 200, todėl mažesnių už 1000 bus 199.

Suskaičiuokime, kiek yra natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, kurie dalijasi iš 7: kadangi iš 7 dalijasi kas septintas skaičius, tai jų yra 142. Bet tarp jų yra ir skaičių, kurie dalijasi iš 5. Tokie skaičiai dalijasi iš 35, ir jų yra 28. Vadinasi, iš 5 arba iš 7 (arba iš abiejų) dalijasi $199 + 142 - 28 = 313$ skaičių. Vadinasi, yra $999 - 313 = 686$ natūralieji skaičiai, mažesni už 1000, kurie nesidalija nei iš 5, nei iš 7.

Analogiškai suskaičiuojame, kad yra 457 natūralieji skaičiai, mažesni už 1000, kurie nesidalija nei iš 3, nei iš 5, nei iš 7.

II būdas. Ką reikia skaičiuoti, geriau suprasime nusibraižę Veno diagramą. Kvadratas vaizduoja visus natūraliuosius, ne didesnius kaip 1000, skaičius, aibė A_5 — skaičius, kurie dalijasi iš 5, aibė A_7 — skaičius, kurie dalijasi iš 7, o aibių sankirta $A_5 \cap A_7$ — skaičius, kurie dalijasi iš $5 \cdot 7$.



Pirmiausia sužinokime, kiek skaičių yra aibėje $A_5 \cup A_7$.

Kiek yra natūraliųjų skaičių, ne didesnių už 1000, kurie dalijasi iš 5, sužinome radę didžiausią sveiką nelygybės $5n \leqslant 1000$ sprendinį;

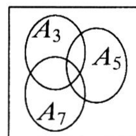
kiek yra tokių skaičių, kurie dalijasi iš 7, sužinome radę didžiausią sveiką nelygybės $7n \leqslant 1000$ sprendinį;

kiek yra skaičių, kurie dalijasi ir iš 5, ir iš 7, t. y. iš 35, sužinome išsprendę nelygybę $35n \leqslant 1000$.

Gauname, kad pirmos rūšies skaičių yra $\frac{1000}{5} = 200$, antros — $\left[\frac{1000}{7}\right] = 142$, trečios — $\left[\frac{1000}{35}\right] = 28$.

Taigi skaičių, ne didesnių už 1000, kurie dalijasi arba iš 5, arba iš 7 (arba ir iš 5, ir iš 7) yra $200 + 142 - 28 = 314$. Tada skaičių, kurie nesidalija nei iš 5, nei iš 7, yra $1000 - 314 = 686$.

Atsakyti į antrąjį klausimą taip pat padės Veno diagrama.



Turime dar sužinoti, kiek yra skaičių, ne didesnių už 1000, kurie dalijasi iš 3, iš $3 \cdot 5 = 15$, iš $3 \cdot 7 = 21$ ir iš $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Tokių skaičių yra atitinkamai 333, 66, 47 ir 9. Tada skaičių, kurie nesidalija nei iš 3, nei iš 5, nei iš 7 ir yra mažesni už 1000, yra $1000 - (333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9) = 457$.

8. $\dfrac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}} = \dfrac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{(a-b)^2}} = \dfrac{a-b}{a-b} = 1.$

9. Jei $a + b + c = 0$, tai $a + b = -c$.
Abi lygybės $a + b = -c$ puses pakelkime kubu:
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$, $a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a + b)$.
Pasinaudoję tuo, kad $a + b = -c$, gauname:
$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

10. Pažymėkime dviratininkų greičius v_1 m/s ir v_2 m/s. Kadangi pirmasis dviratininkas ratą nuvažiuoja 4 s greičiau negu antrasis, tai $\frac{2\pi R}{v_2} - \frac{2\pi R}{v_1} = 4$.
Per 2 min $=$ 120 s pirmasis nuvažiuoja visą ratą ir dar tiek, kiek nuvažiuoja antrasis, taigi $120v_1 = 2\pi R + 120v_2$, $60(v_1 - v_2) = \pi R$.
Iš gautųjų lygčių sudarykime sistemą:

$$\begin{cases} \frac{2\pi R}{v_2} - \frac{2\pi R}{v_1} = 4, \\ 60(v_1 - v_2) = \pi R \end{cases} \Rightarrow v_1 = \frac{\pi R}{10}\ \text{(m/s)},\ v_2 = \frac{\pi R}{12}\ \text{(m/s)}.$$

Iš lygybės $3600 \cdot v_1 = 50\,000$, $360\pi R = 50\,000$ gauname, kad $R \approx 44$ m. Dabar nebesudėtinga apskaičiuoti, kiek ratų per valandą nuvažiuoja antrasis dviratininkas:
$r = \frac{3600v_2}{2\pi R} = \frac{300\pi R}{2\pi R} = 150$ ratų.

11. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

12. $100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}} = \frac{100^{\frac{1}{2}}}{100^{\lg\sqrt[4]{4}}} = \frac{10}{100^{\lg(2^2)^{\frac{1}{4}}}} = \frac{10}{100^{\frac{1}{2}\lg 2}} = \frac{10}{10^{\lg 2}} = \frac{10}{2} = 5.$
Arba: $100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}} = 10^{1-2\lg\sqrt[4]{4}} = 10^{1-\lg\sqrt{4}} = 10^{1-\lg 2} = 10^{\lg 10-\lg 2} = 10^{\lg 5} = 5$.
Nurodymas. Prisiminkite pagrindinę logaritmų tapatybę:
$a^{\log_a b} = b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$.

13. $1+\cos x+\cos\frac{x}{2} = 0$, $1+\cos(2\cdot\frac{x}{2})+\cos\frac{x}{2} = 0$, $1+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2} = 0$, $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$, $\cos\frac{x}{2}\cdot(2\cos\frac{x}{2} + 1) = 0$.
Iš lygties $\cos\frac{x}{2} = 0$ gauname $x = 180° + 360°n$, $n \in \mathbf{Z}$. Nei vienas iš šių sprendinių nepriklauso intervalui $(180°; 360°)$.
Iš lygties $2\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$, $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ gauname:
$\frac{x}{2} = \pm 120° + 360°n$, $x = \pm 240° + 720°n$, $n \in \mathbf{Z}$. Tik vienas sprendinys $x = 240°$ priklauso intervalui $(180°; 360°)$.

14. Pažymėkime bendrojo taško abscisę x_0. Tada ordinatė bus $y_0 = x_0^2$, o liestinės lygtis $\frac{y-y_0}{x-x_0} = 2x_0$, $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$. Žinome, kad tiesė eina per tašką $(1; 0)$, taigi $2x_0(1 - x_0) + x_0^2 = 0$, $x_0(2 - x_0) = 0$. Gauname dvi reikšmes $x_0 = 0$ ir $x_2 = 2$. Parabolės liestinė, nubrėžta taške $x_0 = 0$, sutampa su abscisių ašimi, o nubrėžta taške $x_0 = 2$ — kerta abscisių ašį. Taigi uždavinio atsakymas toks: bendrasis liestinės ir parabolės taškas yra $(2; 4)$.

15. Suskirstykime lentą į 16 kvadratų 2×2. Kiekviename iš jų gali stovėti daugiausiai vienas karalius. Todėl lentoje negalima pastatyti daugiau kaip 16 karalių. Bet 16 karalių pastatyti galima (žr. paveikslėlį).

×		×		×		×	
×		×		×		×	
×		×		×		×	
×		×		×		×	

Taigi didžiausias galimas karalių skaičius yra 16.

16. Įsivaizduokime, kad apklausę 12 sutiktų žmonių surašome jų gimimo mėnesių numerius į eilę: $i_1, i_2, \ldots, i_{12}$, čia i_j gali būti bet kuris iš skaičių. Iš viso tokių eilių (t. y. bandymo baigčių) yra 12^{12}. Eilių, kuriose nėra pasikartojančių numerių, skaičius lygus $12!$. Taigi tikimybė, kad visi sutikti žmonės bus gimę skirtingais mėnesiais, lygi $\frac{12!}{12^{12}}$.

V. ERDVĖS GEOMETRIJA

16. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS

16.1. Stereometrijos aksiomos

Skyrelis tik primena, kaip kuriamas geometrijos rūmas. Tos kūrybos pradžioje padedami „pamatiniai aksiomų akmenys". Tačiau tiesiogiai aksiomomis remsimės retai. Gali iš viso atrodyti keista, kam reikalinga, pavyzdžiui, 1 aksioma: „kad ir kokia būtų plokštuma, yra erdvės taškų, nepriklausančių jai". Galima pusiau juokais paaiškinti jos reikalingumą taip: įsivaizduokime, kad kažkas gerai išnagrinėjęs plokštumos geometriją ir nenorėdamas mokytis daugiau, nutarė plokštumą taip pat pavadinti ir erdve. Kas neuždrausta — tas leista. Vadinasi, jam daugiau nieko ir nereikia mokytis, nes erdvės geometrija yra ta pati kaip ir plokštumos.

Pastaba. Pasiūlykite mokiniams pataisyti 2 aksiomą: „Per bet kokius tris skirtingus, nesančius vienoje tiesėje, erdvės taškus eina vienintelė plokštuma".

16.2. Tiesės erdvėje

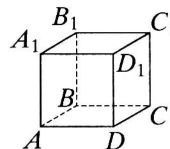
Visą „teorinę" skyrelio medžiagą galima „perskaityti" žvelgiant į brėžinius. Tik prasilenkiančios tiesės ir jų sudaromas kampas yra kiek naujesnė tema, nors ir ji buvo nagrinėta X klasėje...

Suvokiame, žinome kokios gali būti dviejų tiesių erdvėje tarpusavio padėtys.

Mokame atpažinti susikertančias, lygiagrečias ir prasilenkiančias tieses.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelio pratimus galima spręsti tiesiog „akimis tyrinėjant" brėžinius. Tik paskutinis 9-asis uždavinys pareikalaus šiokių tokių formalių svarstymų.



1. a) AB ir BC, AB ir AD, AB ir AA_1, AB ir BB_1, BC ir CD, BC ir BB_1, BC ir CC_1, CD ir DA, CD ir CC_1, CD ir DD_1, DA ir AA_1, DA ir DD_1, A_1B_1 ir B_1C_1, A_1B_1 ir A_1D_1, A_1B_1 ir A_1A, A_1B_1 ir B_1B, B_1C_1 ir C_1D_1, B_1C_1 ir B_1B, B_1C_1 ir C_1C, C_1D_1 ir D_1A_1, C_1D_1 ir C_1C, C_1D_1 ir D_1D, D_1A_1 ir A_1A, D_1A_1 ir D_1D;

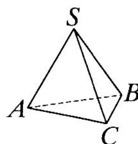
b) AB ir CD, AB ir A_1B_1, AB ir C_1D_1, BC ir AD, BC ir B_1C_1, BC ir A_1D_1, CD ir C_1D_1, CD ir A_1B_1, AD ir A_1D_1, AD ir B_1C_1, A_1B_1 ir C_1D_1, B_1C_1 ir A_1D_1, AA_1 ir BB_1, AA_1 ir CC_1, AA_1 ir DD_1, BB_1 ir CC_1, BB_1 ir DD_1, CC_1 ir DD_1;

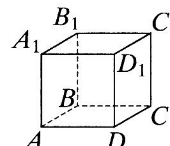
c) AB ir CC_1, AB ir DD_1, AB ir B_1C_1, AB ir A_1D_1, BC ir AA_1, BC ir DD_1, BC ir A_1B_1, BC ir C_1D_1, CD ir AA_1, CD ir BB_1, CD ir A_1D_1, CD ir B_1C_1, AD ir BB_1, AD ir CC_1, AD ir A_1B_1, AD ir C_1D_1, A_1B_1 ir CC_1, A_1B_1 ir DD_1, B_1C_1 ir AA_1, B_1C_1 ir DD_1, C_1D_1 ir AA_1, C_1D_1 ir BB_1, A_1D_1 ir BB_1, A_1D_1 ir CC_1.

2. Kampu tarp prasilenkiančių tiesių BC ir A_1B_1 galima laikyti, pavyzdžiui, statųjį kampą ABC arba $A_1B_1C_1$ (žr. 1 uždavinio brėžinį).

3. a) AB ir AD; b) SA ir SB.

4. AB ir SC, BC ir SA, CA ir SB. Taigi yra 3 poros.





5. Iš brėžinio matome, kad, pavyzdžiui, tiesės AA_1 ir BB_1 yra prasilenkiančios su tiese CD, nors tarpusavyje jos yra lygiagrečios; arba tiesės AB ir AD yra prasilenkiančios su tiese CC_1, nors tarpusavyje jos yra susikertančios.

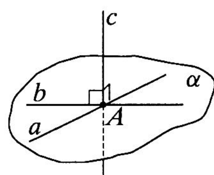
6.

$a \cap b = M, a \parallel c,$
$b \cap c = N$

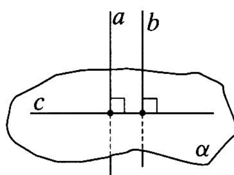
$a \cap b = 0, a \parallel c,$
b ir c – prasilenkiančios

Taigi tiesės b ir c gali būti arba susikertančios, arba prasilenkiančios.

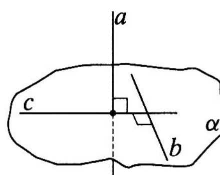
7.



$a \perp c$ ir $b \perp c$,
$a \cap b = A$



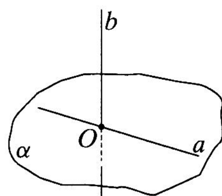
$a \perp c$ ir $b \perp c$,
$a \parallel b$



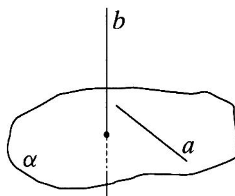
$a \perp c$ ir $b \perp c$,
a ir b – prasilenkiančios

Taigi tiesės gali būti arba susikertančios, arba lygiagrečios, arba prasilenkiančios.

8.



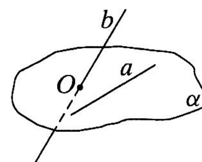
$a \cap b = O$



a ir b – prasilenkiančios

Taigi tiesės gali būti arba susikertančios, arba prasilenkiančios.

9. *Duota*: $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = O$, $O \notin a$.
Įrodyti: a ir b — prasilenkiančios.



Įrodymas. Remsimės tokiomis stereometrijos aksiomų išvadomis:
1) per tiesę ir jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma;
2) per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma;
3) per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.
(*Pastaba.* Šių išvadų įrodymus galite rasti vadovėlio „Matematika 10" II dalyje.)
Sakykime, kad tiesės a ir b yra arba susikertančios, arba lygiagrečios. Tada pagal stereometrijos aksiomų išvadas abi jos yra vienoje plokštumoje β. Plokštumos α ir β sutampa, nes abi eina per tiesę a ir tai tiesei nepriklausantį tašką O (1 išvada). Bet β eina per tiesę b, nesančią plokštumoje α, todėl β negali sutapti su α. Gavome prieštarą, todėl prielaida yra neteisinga. Vadinasi, tiesės a ir b yra prasilenkiančios.

16.3. Tiesė ir plokštuma

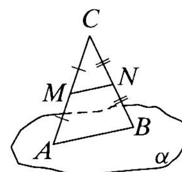
Pagrindinės skyrelio sąvokos: tiesės lygiagretumas plokštumai ir tiesės statmenumas plokštumai. Teoremose suformuluotos paprastos tokių tiesės ir plokštumos padėčių sąlygos. Lygiagretumo kriterijaus įrodymas — proga pasinaudoti prieštaros metodu; statmenumo — prisiminti trikampių savybes.

Suvokiame ir žinome:
tiesės ir plokštumos lygiagretumo apibrėžimą;
tiesės ir plokštumos statmenumo apibrėžimą;
tiesės ir plokštumos lygiagretumo ir statmenumo būtinas bei pakankamas sąlygas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelyje vos keturios užduotys ir tos tik apie tiesės lygiagretumą plokštumai. Tačiau apie tieses, statmenas plokštumoms, daug kalbama kitame skyrelyje.

10. Trikampio vidurinė linija MN yra lygiagreti trikampio kraštinei AB. Remiamės teorema: „Jei plokštumoje nesanti tiesė yra lygiagreti kuriai nors toje plokštumoje esančiai tiesei, tai ta tiesė lygiagreti plokštumai".
Kadangi $MN \parallel AB$, $MN \not\subset \alpha$, $AB \subset \alpha$, tai $MN \parallel \alpha$.



11. Jei duotoje plokštumoje paimtume tašką ir per jį nubrėžtume dvi susikertančias tos plokštumos tieses, tai jos abi negalėtų būti lygiagrečios duotajai tiesei, nes per duotąjį erdvės tašką galima išvesti vienintelę tiesę, lygiagrečią duotajai tiesei.

12. Per duotąjį tašką A išveskime tiesę b, lygiagrečią tiesei a. Kiekviena per tiesę b einanti plokštuma β (išskyrus plokštumą, kuri eina per tieses b ir a) yra lygiagreti tiesei a. Vadinasi, galima išvesti be galo daug tokių plokštumų.

13. Per duotąjį tašką A nubrėžkime plokštumą β, kad ji kirstų duotąją plokštumą α. Plokštumoje β nubrėžkime tiesę, lygiagrečią dviejų plokštumų susikirtimo linijai.
Tokių tiesių galima išvesti be galo daug.

16.4. Statmuo ir pasviroji į plokštumą

Statmuo, pasviroji, jos projekcija — svarbiausios skyrelio sąvokos. Sakoma: nubrėžkime statmenį, pasvirąją... Planimetrijoje tai galima padaryti naudojantis popieriaus lapu — tikrovišku plokštumos modeliu. Tačiau erdvėje „nubrėžkime“ veikiau reiškia „įsivaizduokime“, arba dar tiksliau — „įsivaizduokime seką leistinų veiksmų, kuriuos atlikę, gautume...“ Kaip „nubrėžti“ statmenį į plokštumą nagrinėjama pačiame skyrelio gale, jau aptarus statmenų, pasvirųjų ir jų projekcijų savybes. Svarbiausioji iš jų — trijų statmenų teorema, kurios įrodymą — teiginių apie trikampius grandinėlę — vertėtų aptarti.

Suvokiame ir žinome:

statmens, pasvirosios į plokštumą, jos projekcijos sąvokas;

statmens, pasvirosios į plokštumą, jos projekcijos savybes.

Mokame:

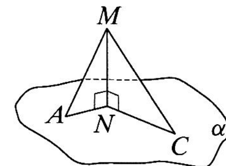
naudojantis trijų statmenų teorema „atpažinti“ statmenas viena kitai erdvės tieses;

skaičiuoti statmens, pasvirosios į plokštumą, jos projekcijos ilgius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Didesnė uždavinių dalis — apie statmens, pasvirosios ir projekcijos ilgių skaičiavimą naudojantis Pitagoro teorema. Visi moksleiviai turėtų mokėti išspręsti 14–19 pratimus. 20 uždavinyje prieš skaičiuojant reikia pagalvoti ir nustatyti, į kokį pagrindo tašką pataiko piramidės aukštinė. 25 uždavinį galima pasiūlyti išspręsti nieko nebraižant ir neskaičiuojant, tiesiog tyrinėjant vadovėlio brėžinį.

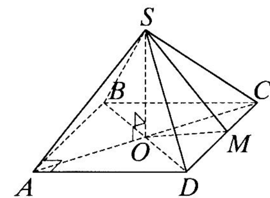
14. Tegu $NC > NA$. Įrodysime, kad $MC > MA$.
Taikome Pitagoro teoremą statiesiems trikampiams AMN ir CMN:
$MA^2 = MN^2 + NA^2$, $MC^2 = MN^2 + NC^2$.
Kadangi $NC^2 > NA^2$, tai $MC^2 > MA^2$ ir $MC > MA$.



15. Pasvirosios projekcijos ilgis lygus $\sqrt{50^2 - 30^2} = 40\,(\text{cm})$.

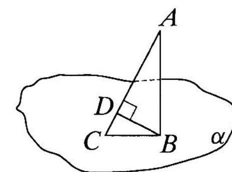
16. a) $\sqrt{2}a$; b) $2a$; c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

17. a) Iš stačiojo lygiašonio trikampio ADC:
$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2} = 3\sqrt{2}\,(\text{cm})$.
Iš stačiojo trikampio SOA: $SA = \sqrt{9^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{11}\,(\text{cm})$.
b) $OM = \frac{1}{2}AD = 3\,\text{cm}$.
Iš stačiojo trikampio SOM: $SM = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}\,(\text{cm})$.
Atsakymas. a) $3\sqrt{11}$ cm; b) $3\sqrt{10}$ cm.

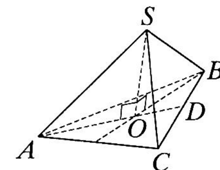


18. 3,6 cm.

19. $AB = \sqrt{AC \cdot AD}$, $2 = \sqrt{3AD}$, $AD = 1\frac{1}{3}$ dm.

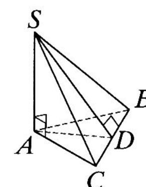


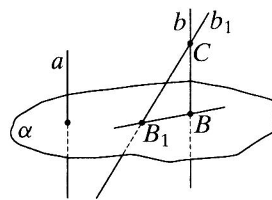
20. Tegu O — lygiakraščio trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Tada
$AD = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,(\text{cm})$, $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,(\text{cm})$.
Iš stačiojo trikampio SOA: $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\,(\text{cm})$.
Atsakymas. 2 cm.



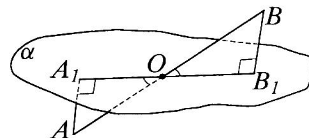
21. Remiantis sąlyga, EA — statmuo į kvadrato plokštumą, EB — pasviroji, AB — jos projekcija. Kadangi $BC \perp AB$ ($ABCD$ — kvadratas), tai pagal trijų statmenų teoremą $BC \perp EB$. Vadinasi, trikampis EBC yra statusis.
Kadangi CD statmena projekcijai AD, tai pagal tą pačią teoremą CD statmena ir pasvirajai ED. Vadinasi, trikampis EDC yra statusis.

22. Išveskime $SD \perp BC$ ir sujunkime taškus A ir D. Kadangi $BC \perp SD$, tai pagal trijų statmenų teoremą $BC \perp AD$.
Lygiakraščio trikampio ABC aukštinė $AD = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,(\text{cm})$.
Pagal Pitagoro teoremą $SD = \sqrt{13^2 + (3\sqrt{3})^2} = 14\,(\text{cm})$.
Atsakymas. 14 cm.

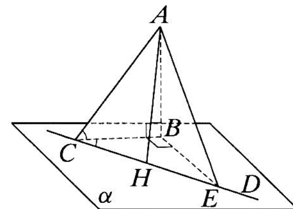




23. Tegu a ir b — dvi plokštumai α statmenos tiesės. Tarkime, kad $a \nparallel b$. Tiesėje b pažymėkime tašką C, nepriklausantį plokštumai α. Per tašką C nubrėžkime tiesę b_1, lygiagrečią tiesei a. Tegu B ir B_1 yra atitinkamai tiesių b ir b_1 susikirtimo su plokštuma α taškai. Kadangi iš taško C plokštumai α galima nubrėžti tik vieną statmenį, tai CB_1 — pasviroji plokštumai α. Bet statmuo a ir pasviroji b_1 tai pačiai plokštumai negali būti lygiagretūs. Gavome prieštaravimą, todėl prielaida neteisinga ir $b \parallel a$.



24. *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Atkarpos ilgis turi būti 8 dm.
Tegu $AO = x$ dm. Tuomet $BO = (8 - x)$ dm.
$\angle AOA_1 = \angle BOB_1$ (kryžminiai), $\frac{AA_1}{AO} = \frac{BB_1}{BO}$ (lygių kampų sinusai lygūs).
Tada $\frac{1{,}5}{x} = \frac{2{,}5}{8-x}$, $2{,}5x = 12 - 1{,}5x$, $x = 3$. Taigi $AO = 3$ dm.
Tada $\sin\angle AOA_1 = \frac{AA_1}{AO} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$ ir $\angle AOA_1 = 30°$.



25. *I būdas.* Brėžiame $AH \perp CD$ ir sujungiame taškus B ir H. Pagal trijų statmenų teoremą $BH \perp CD$.
Tarkime, kad $AC = a$. Iš stačiojo trikampio ABC:
$BC = AC \cdot \cos\angle ACB = a \cdot \cos 45° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Iš stačiojo trikampio BHC:
$CH = BC \cdot \cos\angle BCH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45° = \frac{a}{2}$.
Stačiojo trikampio ACH statinis CH lygus pusei įžambinės AC, vadinasi, $\angle CAH = 30°$. Tada $\angle ACH = 60°$.

II būdas. $\triangle CBE$ — status lygiašonis, $BC = BE$; $\triangle CBA$ — status lygiašonis, $BC = BA$. Vadinasi, $BA = BE$. Taigi $\triangle ABE$ — status lygiašonis. $\triangle ACE$ — lygiakraštis ($\triangle CBA = \triangle ABE = \triangle CBE$ — pagal du statinius), $\angle ACE = 60°$.
Atsakymas. 60°.

16.5. Dvi plokštumos erdvėje

Pagrindinė skyrelio sąvoka — kampas tarp plokštumų — dvisienis kampas ir jo didumo matavimas. Ypatingai svarbios statmenos viena kitai plokštumos — statūs dvisieniai kampai. Mes „gyvename" juose: tik žvilgtelkime į bet kurį kambario kampą.

Suvokiame ir žinome:

kaip matuojamas kampas tarp dviejų plokštumų;
kokios plokštumos yra lygiagrečios;
kokios plokštumos yra statmenos.

Mokame:

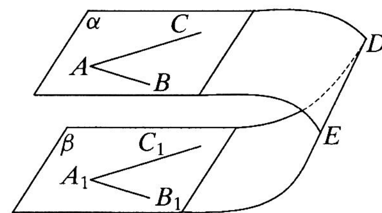
„atpažinti" brėžiniuose tiesinius kampus, kurių didumai lygūs dvisienių kampų didumams;
apskaičiuoti kampą tarp plokštumų remiantis trikampių savybėmis ir trigonometrinėmis funkcijomis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

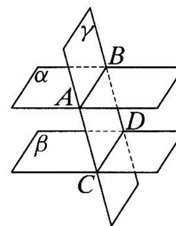
26–32 pratimai skirti plokštumų lygiagretumo, statmenumo, dvisienio kampo sąvokoms įtvirtinti, mokytis nagrinėti brėžinius, kituose reikalaujama apskaičiuoti atstumus ar kampų didumus. 33 uždavinyje reikalaujamą atstumą apskaičiuoti nesunku, tačiau prieš tai reikia gerai išnagrinėti, ką gi iš tiesų reikia skaičiuoti.

26. Prasilenkiančios arba lygiagrečios.

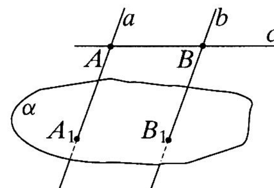
27. *Duota*: $AB \subset \alpha$, $AC \subset \alpha$, $AB \cap AC = A$, $A_1B_1 \subset \beta$, $A_1C_1 \subset \beta$, $A_1B_1 \cap A_1C_1 = A_1$, $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$.
Įrodyti: $\alpha \parallel \beta$.
Pagal tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymį $AB \parallel \beta$ ir $AC \parallel \beta$.
Tarkime, kad plokštumos α ir β susikerta ir jų susikirtimo tiesė yra DE. Remsimės teorema: „Jeigu per tiesę AB (AC), lygiagrečią plokštumai β, išvesta plokštuma α kerta plokštumą β tiese DE, tai tiesė AB (AC) lygiagreti tiesei DE". Vadinasi, plokštumoje α per tašką A eina dvi tiesės AB ir AC, lygiagrečios su tiese DE, t. y. $AB \parallel DE$, $AC \parallel DE \Rightarrow AB \parallel AC$. Bet tai prieštarauja sąlygai, kad tiesės AB ir AC susikerta. Vadinasi, prielaida, kad plokštumos α ir β susikerta, yra neteisinga. Taigi $\alpha \parallel \beta$.



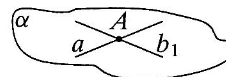
28. *Duota*: $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $D \in \beta$, $AC \parallel BD$.
Įrodyti: $AC = BD$.
Per lygiagrečias tieses AC ir BD nubrėžkime plokštumą γ. Ji kirs plokštumas α ir β lygiagrečiomis tiesėmis AB ir CD (žr. vadovėlyje patarimą, p. 51). Keturkampis $ABDC$ yra lygiagretainis, todėl $AC = BD$.

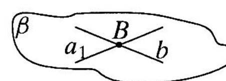


29. *Duota*: $a \parallel b$, $c \parallel \alpha$, $a \cap c = A$, $b \cap c = B$, $a \cap \alpha = A_1$, $b \cap \alpha = B_1$.
Įrodyti: $AA_1 = BB_1$.
Per lygiagrečias tieses a ir b išveskime plokštumą β, kuri kirs plokštumą α tiese A_1B_1. Jeigu plokštuma eina per tiesę, lygiagrečią kitai plokštumai, ir kerta tą plokštumą, tai tų plokštumų susikirtimo linija yra lygiagreti duotajai tiesei. Taigi $A_1B_1 \parallel AB$ ir ABB_1A_1 — lygiagretainis. Vadinasi, $AA_1 = BB_1$.



30. Tegu tiesės a ir b yra prasilenkiančios. Per bet kurį tiesės a tašką A išveskime tiesę b_1, lygiagrečią tiesei b. Per susikertančias tieses a ir b_1 išvedame plokštumą α.
Per bet kurį tiesės b tašką B išveskime tiesę a_1, lygiagrečią tiesei a. Per susikertančias tieses b ir a_1 išvedame plokštumą β.
Plokštumos α ir β yra lygiagrečios (žr. 27 uždavinį).





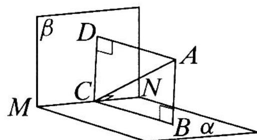
31. Remiamės teorema: „Jeigu dvi lygiagrečios plokštumos perkirstos trečiąja plokštuma, tai jų susikirtimo linijos yra lygiagrečios". Taigi $MN \neq AC$ ir $MN \parallel AC$, vadinasi, keturkampis $AMNC$ — trapecija.

32. a) Kadangi trikampis ABC yra lygiakraštis ir O — jo centras, tai CD yra šio trikampio aukštinė. SO — statmuo į pagrindo plokštumą, SD — pasviroji, DO — pasvirosios projekcija. Kadangi $AB \perp DO$, tai pagal trijų statmenų teoremą $AB \perp SD$. Vadinasi, kampas SDC yra dvisienio kampo, kurį sudaro šoninė siena ABS su pagrindu ABC, tiesinis kampas.

b) 1) $AO \cap BC = E$.
2) Sujungiame atkarpa taškus S ir E.
$\angle AES$ yra dvisienio kampo, kurį sudaro šoninė siena BCS su pagrindu ABC, tiesinis kampas.

c) Brėžimas analogiškas kaip ir b) punkte.

33. 10 cm. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad keturkampis $ABCD$ — stačiakampis.



34. Iš sąlygos $\angle CBO = 30°$, o kampas tarp plokštumos α ir trikampio ABC plokštumos lygus $\angle CMO$.
Pažymėkime $AC = BC = a$. Tada $AB = a\sqrt{2}$, $BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Iš stačiojo trikampio BOC: $CO = \frac{a}{2}$, $BO = BC\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Iš stačiojo trikampio BMO: $MO = \sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{a}{2}$.
Kadangi $MO = CO$ ir $\triangle COM$ — status, tai $\angle OMC = 45°$.
Atsakymas. 45°.

35. Iš viršūnės C nubrėžtą lygiašonio trikampio ACB aukštinę pažymėkime CK.
Kadangi į lygiašonio trikampio pagrindą nubrėžta aukštinė yra ir pusiaukraštinė, ir pusiaukampinė, tai $AK = BK = CK = \frac{32}{2} = 16$ (cm).
Iš stačiojo trikampio AKD: $DK = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$ (cm).
Iš trikampio CKD pagal kosinusų teoremą:
$CD^2 = 16^2 + 30^2 - 2 \cdot 16 \cdot 30 \cdot \cos 60° = 676$, $CD = 26$ cm.
Atsakymas. 26 cm.

16.6. Erdvės koordinačių sistema

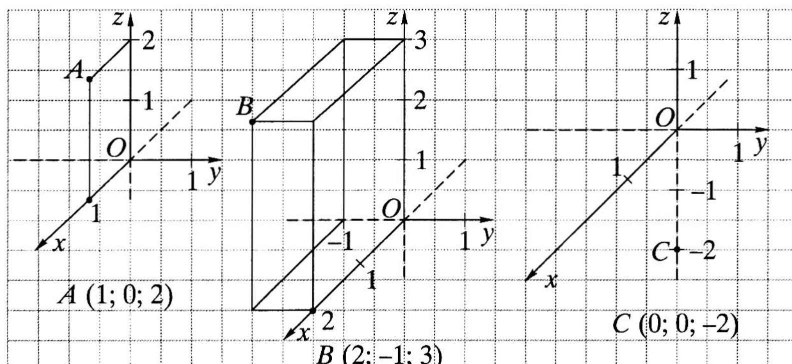
Nors koordinačių sistemos sąvoka moksleiviams nenauja, galima dar kartą pabrėžti jos svarbą: erdvės taškai „įgyja kitą pavidalą“ — užrašomi skaičių trejetais. Taigi erdvės elementų sąryšiai gali būti reiškiami skaičių sąryšiais — geometrija „išverčiama“ į skaičių kalbą.

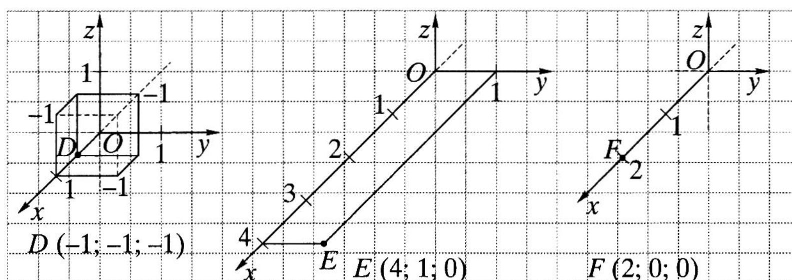
Suvokiame ir žinome:
kaip sudaryti erdvės koordinačių sistemą;
kaip rasti nurodytų taškų koordinates.

Mokame apskaičiuoti geometriniais sąryšiais apibrėžtų taškų koordinates nurodytoje koordinačių sistemoje.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

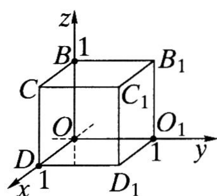
36.





a) $C \in Oz$, $F \in Ox$; b) $A \in Oxz$, $E \in Oxy$.

37.



$C(1; 0; 1)$, $B_1(0; 1; 1)$, $C_1(1; 1; 1)$, $D_1(1; 1; 0)$.

38. Kadangi taškas M yra Oy ašies taškas, tai jo koordinatės yra $(0; y; 0)$. Tada
$MA^2 = (2-0)^2 + (-1-y)^2 + (1-0)^2 = (y+1)^2 + 5$;
$MB^2 = (0-0)^2 + (1-y)^2 + (3-0)^2 = (1-y)^2 + 9$;
$(y+1)^2 + 5 = (1-y)^2 + 9$, $y = 1$.
Taigi $M(0; 1; 0)$.

17. ERDVĖS VEKTORIAI

17.1. Erdvės vektoriai ir jų veiksmai

Šis skyrelis — tik XI klasės vadovėlio vektorių skyriaus sąvokų ir apibrėžimų priminimas ir pakartojimas nagrinėjant erdvės vektorius. Galima tik peržiūrėti ir aptarti brėžinius ir pereiti prie skyrelio uždavinių.

Suvokiame ir žinome veiksmų su vektoriais apibrėžimus, taisykles ir savybes.

Mokame:
įžvelgti vektorių sąryšius erdvės figūrų brėžiniuose;
pertvarkyti ir prastinti vektorinius reiškinius;
tikrinti, ar vektoriai yra kolinearūs;
reikšti vienus vektorius kitais.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Sąlyginai uždavinius galima suskirstyti į tris grupes: vektorių veiksmų uždaviniai (39–40, 42, 45–46, 51, 52); vektorių lygumo, kolinearumo tikrinimo uždaviniai (41, 43, 44, 47); vektorių reiškimo kitais vektoriais uždaviniai (48–50, 53–57). Daugiausia dėmesio, matyt, reikėtų skirti pastariesiems.

39. a) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM}$;
b) $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CN}) - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EN} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BN}$;
c) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CE} - (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{EN}) = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NE}) + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

40. a) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CC_1} = -\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BB_1} = -(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB_1}) = -\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{B_1D}$;
b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DF}$;
c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{C_1E} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{C_1F} = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{C_1F} - \overrightarrow{C_1E}) = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.

41. a) ir c) $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{DC}$ ir $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ ir $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ ir $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ ir $\overrightarrow{DD_1}$;
b) $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1A}$ ir $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{A_1A}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1A}$ ir $\overrightarrow{DD_1}$.

42. a) $\vec{m} = -1{,}5(2\vec{a} - 4\vec{b}) - (-3\vec{a} + 5\vec{b}) + 0{,}5(-6\vec{b} - 8\vec{a}) =$
$-3\vec{a} + 6\vec{b} + 3\vec{a} - 5\vec{b} - 3\vec{b} - 4\vec{a} = -4\vec{a} - 2\vec{b}$.
b) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - 1\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} =$
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} - 1\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD} = -(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = -\overrightarrow{AD}$.

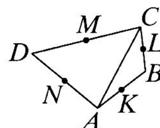
43. *Pastaba.* Sąlygoje yra netikslumas. Vektoriai pažymėti ne briaunose, o *sienose*.
Kolinearių vektorių poros: $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{A_1O}$, $\overrightarrow{D_1A}$ ir $\overrightarrow{BC_1}$.

44. Kadangi vektoriai $2\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{a} - 2\vec{b}$ yra kolinearūs, tai egzistuoja toks skaičius k, kad $2\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} - 2\vec{b})$. Iš šios lygybės gauname, kad $\vec{a} = \frac{2k+1}{k-2}\vec{b}$, čia $k \neq 2$.
Vadinasi, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs.

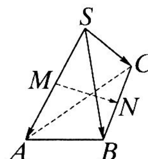
45. *I būdas.* $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$. Kadangi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1}$, tai $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.
II būdas. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}$. Kadangi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1}$, tai $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

46. a) $\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{SA}$; b) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BS} = \vec{0}$;
c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \cdot 2\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CC_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OC_1}$.

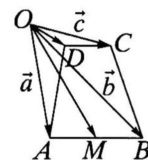
47. Nubrėžkime keturkampio $ABCD$ įstrižainę AC.
Kadangi $AK = KB$, $BL = LC$, tai KL yra trikampio ABC vidurinė linija.
Vadinasi, $KL \parallel AC$ ir $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Analogiškai $MN \parallel AC$ ir $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Vadinasi, $MN \parallel KL$ ir $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.
Taigi $KLMN$ — lygiagretainis.



48. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN}$ ir $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.
Sudėkime šias lygybes panariui:
$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC}$,
$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$,
$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

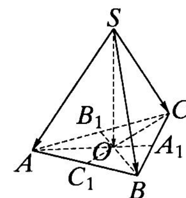


49. a) $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$;
b) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}$;
c) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

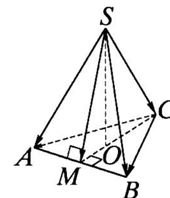


50. a) $\vec{x} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CC_1}$;
b) $\vec{x} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{DB_1}$;
c) $\vec{x} = \overrightarrow{A_1C} - \overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1A}$.

51. $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\big((\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}) + (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})\big) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SA})$.
$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SA})$.
Iš $\triangle ASO$:
$\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.



52. $\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) + \frac{1}{6}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) =$
$\frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{6}\big((\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}) + (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC})\big) =$
$\frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{SB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SM}$,
kur $|\overrightarrow{SM}|$ yra tetraedro šoninės sienos ASB apotema.



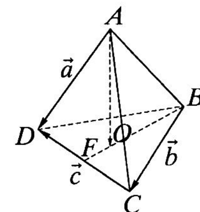
53. $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{DA_1}$ ir $\overrightarrow{A_1D_1}$; $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{DA_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$; $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$; $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$; $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$; $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$; $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$.

54. a) Galima, nes vektoriai $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1D_1}$ ir $\overrightarrow{B_1C_1}$ (lygus $\overrightarrow{BC}$) yra vienoje plokštumoje.
b) Negalima.
c) Galima, nes vektoriai $\overrightarrow{AB}$ (lygus $\overrightarrow{DC}$), $\overrightarrow{AB_1}$ ir $\overrightarrow{A_1B_1}$ yra vienoje plokštumoje.

55. a) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}) = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$;
b) $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}$;
c) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{D_1O} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = 2\vec{a}$.

56. $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

57. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$;
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \vec{a} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$,
$\overrightarrow{BF} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;
$\overrightarrow{AO} = \vec{a} - \vec{c} - \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$.



17.2. Erdvės vektorių koordinatės

Kiekvieną plokštumos vektorių galima išreikšti dviem vienetiniais koordinačių ašių vektoriais, o reiškiant erdvės vektorius tenka pasitelkti dar vieną. Tai svarbiausias plokštumos ir erdvės vektorių skirtumas. Vietoje dviejų koordinačių turime tris, visos formulės kiek pailgėja, ir tiek. Žinoma, galima iš karto dėstyti ir plokštumos ir erdvės vektorius. Vadovėlyje jie dėstomi atskirai viena vertus dėl to, kad atskirai dėstoma plokštumos ir erdvės geometrija, kita vertus — vistiek dvyliktoje klasėje tektų grįžti prie vektorių, kad juos pakartotume.

Suvokiame ir žinome:
vektoriaus koordinačių sąvoką;
koordinačių savybes.

Mokame taikyti vektorius taškų koordinatėms rasti bei atkarpų ilgiams skaičiuoti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Vertėtų atlikti keletą užduočių, kuriose reikalaujama rasti vektorių koordinates (58–61), taip pat — taškų koordinates (64–65, 67–68, 70) ir išspręsti vektorių kolinearumo tikrinimo, ilgių skaičiavimo pratimų (62–63, 66–67, 69, 71).

58. a) $\overrightarrow{OC} = 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2{,}5\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_1} = 2{,}5\vec{i} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB_1} = 2{,}5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$;
b) $\overrightarrow{OO_1}(0; 0; 3)$, $\overrightarrow{OC_1}(0; 4; 3)$, $\overrightarrow{OB_1}(2{,}5; 4; 3)$, $\overrightarrow{OB}(2{,}5; 4; 0)$.

59. a) $(-6; 3; 6)$; b) $(-2; 0; 1)$; c) $(-4; -3; 5)$; d) $(-6; 0; 6)$.

60. a) $(1; -6{,}5; 2)$; b) $(6; -4; 4)$; c) $(-1; 6{,}5; -2)$; d) $(6; 0; 2)$.

61. a) $\vec{a}(-1; -2; -5{,}6)$; b) $\vec{b}(5{,}5; -7; 0{,}8)$; c) $\vec{c}(-5; -1; 6{,}2)$.

62. a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + (\sqrt{11})^2} = 6$;
b) $\overrightarrow{AB}(2; -4; -\sqrt{5})$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-\sqrt{5})^2} = 5$;
c) $\overrightarrow{AB}(-2; 2; -1)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.

63. Kolinearių vektorių koordinatės yra proporcingos, todėl tikriname proporcijas:
a) Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs, nes $\frac{7}{-5{,}6} = \frac{-5}{4} = \frac{2}{-1{,}6}$.
b) Vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ nėra kolinearūs, nes $\frac{-1{,}2}{-4{,}8} \neq \frac{3{,}6}{10{,}8}$.
c) $\overrightarrow{AB}(6; 4; -6)$, $\overrightarrow{CD}(-3; -2; 3)$. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra kolinearūs, nes $\frac{6}{-3} = \frac{4}{-2} = \frac{-6}{3}$.

64. a) $\vec{a}(-1; 1; 3)$. Tegu $B(x; y; z)$. Tada $\overrightarrow{AB}(x + 2; y; z - 5)$.
Kadangi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, tai $\begin{cases} x + 2 = -1, \\ y = 1, \\ z - 5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = 1, \\ z = 8. \end{cases}$
Taigi $B(-3; 1; 8)$.
Analogiškai sprendžiami b) ir c) punktai:
b) $B(3; -7; 8)$; c) $B(3; \frac{2}{3}; \sqrt{2})$.

65. a) $\vec{m}(5; -4; -2)$. Tegu $M(x; y; z)$. Tada $\overrightarrow{MN}(0 - x; 0 - y; -1 - z)$.
Kadangi $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$, tai $\begin{cases} 0 - x = 5, \\ 0 - y = -4, \\ -1 - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = 4, \\ z = 1. \end{cases}$
Taigi $M(-5; 4; 1)$.
Analogiškai sprendžiami b) ir c) punktai:
b) $M(-\frac{3}{4}; \frac{3}{20}; \frac{2}{5})$; c) $M(4\sqrt{2}; -2\sqrt{3}; 2\sqrt{2})$.

66. a) $\overrightarrow{AB}(-1; -5; 8)$, $\overrightarrow{AC}(-2; -10; 16)$.
Kadangi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra kolinearūs. Vadinasi, taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje.
b) $\overrightarrow{AB}(-7; 3; 1)$, $\overrightarrow{AC}(-4; -2; -1)$.
Vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ koordinatės nėra proporcingos, todėl šie vektoriai nėra kolinearūs. Vadinasi, taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje.

67. $\overrightarrow{AB}(-2; 8; -18)$. Tegu $D(x; y; z)$. Tada $\overrightarrow{DC}(14 - x; 0 - y; -2 - z)$.
Kadangi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, tai $\begin{cases} 14 - x = -2, \\ 0 - y = 8, \\ -2 - z = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16, \\ y = -8, \\ z = 16. \end{cases}$
Taigi $D(16; -8; 16)$.

68. a) $x = \frac{3-6}{2} = -1{,}5$, $y = \frac{4+2}{2} = 3$, $z = \frac{0+5}{2} = 2{,}5$; $M(-1{,}5; 3; 2{,}5)$;
b) $x = \frac{3{,}6-1{,}6}{2} = 1$, $y = \frac{-2{,}8+3}{2} = 0{,}1$, $z = \frac{-4-5{,}4}{2} = -4{,}7$; $M(1; 0{,}1; -4{,}7)$.

69. $M(1; 2; -2)$, $\overrightarrow{OM}(1; 2; -2)$, $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$.

70. a) Tegu $B(x; y; z)$. Tada $\begin{cases} \frac{-6+x}{2} = 0, \\ \frac{7+y}{2} = -4, \\ \frac{-3+z}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = -15, \\ z = 1. \end{cases}$

Taigi $B(6; -15; 1)$.
Analogiškai sprendžiamas ir b) punktas:
b) $B(2{,}8; -3{,}6; 2{,}2)$.

71. Kolinearių vektorių koordinatės yra proporcingos, todėl $\frac{4}{n} = \frac{m}{1} = \frac{n}{m^2}$.
Sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} \frac{4}{n} = \frac{m}{1}, \\ \frac{m}{1} = \frac{n}{m^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{4}{m}, \\ \frac{m}{1} = \frac{\frac{4}{m}}{m^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{4}{m^3} \Rightarrow m^4 = 4 \Rightarrow m_1 = -\sqrt{2},\ m_2 = \sqrt{2}.$$

Tada $n_1 = -2\sqrt{2}$, $n_2 = 2\sqrt{2}$.
Taigi $\vec{a}(4; \sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, $\vec{b}(2\sqrt{2}; 1; 2)$ arba $\vec{a}(4; -\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$, $\vec{b}(-2\sqrt{2}; 1; 2)$.
Atsakymas. $m = -\sqrt{2}$, $n = -2\sqrt{2}$ arba $m = \sqrt{2}$, $n = 2\sqrt{2}$.

72. a) Išreikškime vektorių $\vec{a}$ vektoriais $\vec{b}$ ir $\vec{c}$. Tegu $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$.

Sprendžiame sistemą $\begin{cases} 2 = x + 0 \cdot y, \\ 0 = x + y, \\ -2 = 0 \cdot x + y. \end{cases}$

Kiekvieną sistemos lygtį tenkina $x = 2$, $y = -2$. Kadangi $\vec{a} = 2\vec{b} - 2\vec{c}$, tai vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ yra komplanarūs.

b) Pabandykime vektorių $\vec{f}$ išreikšti vektoriais $\vec{g}$ ir $\vec{h}$. Tegu $\vec{f} = x\vec{g} + y\vec{h}$.

Sprendžiame sistemą $\begin{cases} -4 = 0 \cdot x + y, \\ -1 = -12x - 2y, \\ -10 = 0 \cdot x + 5y. \end{cases}$

Iš pirmųjų dviejų lygčių gauname $y = -4$ ir $x = \frac{3}{4}$, tačiau šios reikšmės netenkina trečiosios lygties.

Kadangi vektoriaus $\vec{f}$ negalime išreikšti vektoriais $\vec{g}$ ir $\vec{h}$, tai šie trys vektoriai nėra komplanarūs.

17.3. Vektorių skaliarinė daugyba

Vektorių skaliarinės daugybos apibrėžimas pateiktas jau XI klasės vadovėlyje. Šiame skyrelyje jis tik pakartotas. Pakartotas ir skaliarinės sandaugos reiškimo koordinatėmis formulės įrodymas. Jei mokytojai manys, kad tikslinga, — primins įrodymą, jeigu ne — užteks užrašyti formulę.

Suvokiame ir žinome:
skaliarinės daugybos apibrėžimą;
skaliarinės sandaugos reiškimo vektorių koordinatėmis formulę.

Mokame taikyti skaliarinę daugybą tiesių statmenumui tikrinti bei kampams skaičiuoti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Visuose uždaviniuose tenka arba skaičiuoti vektorių skaliarinės sandaugos reikšmę, arba naudotis skaliarinės sandaugos reiškimo formule ar apibrėžimu. Patarkime visų pirma „įvertinti" savo žinias apie vektorius: ar jie nusakyti koordinatėmis, ar geometriniais sąryšiais? O gal vektoriai užrašyti reiškiniais, kuriuos galima pertvarkyti ir suprastinti?

73. $(2\vec{a}+\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b}) = 6\vec{a}^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2 = 6\cdot 4^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2^2 = 96+|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ - 4 = 96+4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-4 = 96.$

74. a) $\vec{m}\cdot\vec{n} = 0\cdot(-3)+1\cdot(-1)+2\cdot 2 = 3;$
b) $\vec{k}\cdot\vec{k} = 5^2+0^2+(-4)^2 = 41;$
c) $(\vec{m}+\vec{n})(-3;0;4)$, $(\vec{m}+\vec{n})\cdot\vec{k} = -3\cdot 5+0\cdot 0+4\cdot(-4) = -31.$

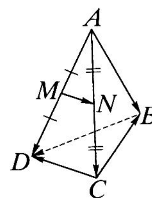
75. a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 2+5\cdot(-1) = 0$. Vadinasi, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmeni.
b) $\vec{a}(-3;-2;0)$, $\vec{b}(2;-3;5)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -3\cdot 2+(-2)\cdot(-3)+0\cdot 5 = 0$. Vadinasi, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmeni.
c) $\overrightarrow{MN}(1;-2;-1)$, $\vec{a}\cdot\overrightarrow{MN} = 0\cdot 1+2\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1) = -1$. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\overrightarrow{MN}$ nėra statmeni.

76. a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-4)+0\cdot 5+4\cdot x = 4x-8$. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ bus statmeni, kai $4x-8=0$. Iš čia $x=2$.
b) $\vec{a}(x;-3;x)$, $\overrightarrow{AB}(-5;8;-3)$, $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB} = -5x-3\cdot 8-3x = -8x-24$. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\overrightarrow{AB}$ bus statmeni, kai $-8x-24=0$. Iš čia $x=-3$.

77. $\overrightarrow{AB}(-3;3;3)$, $\overrightarrow{BC}(-1;-3;-7)$, $\overrightarrow{AC}(-4;0;-4)$;
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -27$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = 32$.
Statmeni yra vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$.

78. $\overrightarrow{AB}(0;-4;-2)$, $\overrightarrow{BC}(0;7;-4)$, $\overrightarrow{AC}(0;3;-6)$;
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -20$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = 45$.
Trikampis ABC yra statusis, nes $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ ir $\angle A = 90^\circ$.

79. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 10\cdot 10\cdot\cos 60^\circ = 50;$
b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\cdot 100 = -50;$
c) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot\cos 180^\circ = -50;$
d) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 10\cdot 10\cdot\cos 90^\circ = 0.$



80. $\overrightarrow{AC_1} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{A_1D} = \vec{b}-\vec{c}$;
$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D} = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}^2 = \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\overrightarrow{A_1D} = 0$, nes $\vec{a}\perp\overrightarrow{A_1D}$.
Kadangi $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D} = 0$, tai $\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{A_1D}$.

81. $\vec{a}(1;-1;\frac{1}{2})$, $\vec{b}(-2;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$;
$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{1\cdot(-2)+(-1)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 135^\circ$.

82. $\overrightarrow{AB}(2;-2;0)$, $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$;
$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \dfrac{2\cdot 3+(-2)\cdot 0+0\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+(-3)^2}} = \frac{1}{2}$, $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = 60^\circ$.

83. Koordinačių ašyse imkime vienetinius vektorius $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$ ir $\vec{k}(0; 0; 1)$.
a) $\vec{a}(1; 2; 2)$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{1}{3}$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = \frac{2}{3}$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{2}{3}$.
b) $\overrightarrow{AB}(1; 1; 1)$, $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{i}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{j}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{k}}) = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

84. Vektorių $\vec{c}$, kolinearų vektoriui $\vec{b}$, pažymėkime $\vec{c}(x; 3x; x)$.
Tada $\vec{a} \cdot \vec{c} = -2x + 9x - 5x = 2x$. Pagal sąlygą $2x = 10$, $x = 5$.
Ieškomas vektorius $\vec{c}(5; 15; 5)$.

85. Pažymėkime $\vec{m}(x; y; z)$. Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + z = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$
Iš antrosios lygties išsireiškiame x, iš trečiosios — y ir statome į pirmąją lygtį:
$x = -z$, $y = -z$, $z^2 + z^2 + z^2 = 1$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Tada $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ir $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Taigi $\vec{m}(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$ arba $\vec{m}(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3})$.

86. Pažymėkime $\vec{x}(x; y; z)$. Pagal sąlygą:
$$\begin{cases} -5x + y = -20, \\ -4y + 3z = -9, \\ -x - 2y - 3z = 5. \end{cases}$$
Iš pirmosios lygties: $y = 5x - 20$.
Iš antrosios lygties: $3z = 4y - 9 = 4(5x - 20) - 9 = 20x - 89$.
Šias reikšmes įstatome į trečiąją lygtį:
$-x - 2(5x - 20) - 20x + 89 = 5$, $x = 4$.
Tada $y = 5 \cdot 4 - 20 = 0$ ir $z = \frac{1}{3}(20 \cdot 4 - 89) = -3$.
Taigi $\vec{x}(4; 0; -3)$.

18. BRIAUNAINIAI

Viena svarbiausių ir sudėtingiausių sąvokų, susijusių su erdvės kūnais — tūris. Dažniausiai jam skaičiuoti taikomos formulės, ir tiek. Skyriaus pradžioje šiek tiek primenama sąvokos prasmė, siejant tūrio sąvoką su kūnų „didumo" lyginimu naudojant tam tikrą matą. Tai iš karto leidžia pajusti, kur slypi tūrio sąvokos sudėtingumas. Kaip „bendraisiais matais" — kubeliais galima užpildyti stačiakampį gretasienį, kurio matmenys reiškiami iracionaliaisiais skaičiais, tuo labiau — prizmę?

18.1. Prizmės

Skyriaus sąvokos moksleiviams yra žinomos. Trumpai jas apžvelgę imkimės uždavinių.

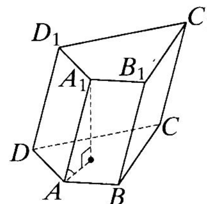
Žinome prizmės (stačiosios, pasvirosios, taisyklingosios, gretasienio) apibrėžimus, savybes, tūrio formulę.

Mokame:
pavaizduoti prizmę;
remiantis trikampio ir trigonometriniais sąryšiais skaičiuoti briaunos, aukštinės, apotemos ilgius;
skaičiuoti paviršiaus plotą ir tūrį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pitagoro teorema — pakankamas įrankis daugumai skyrelio uždavinių išspręsti. Didesnė uždavinių dalis — apie gretasienius. Kad būtų įsiminta, jog statieji gretasieniai yra nebūtinai stačiakampiai gretasieniai — galima pasiūlyti išspręsti, pavyzdžiui, 100 ir 101 uždavinius (arba 102–103).

87. Brėžiame A_1A_2, statmenį į pagrindo plokštumą. Tada $\angle A_1AA_2 = 30°$ ir $AA_2 = 12\sqrt{3}$ cm. Iš stačiojo trikampio AA_2A_1:
$A_1A_2 = AA_2 \operatorname{tg} 30° = 12\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 12$ (cm),
$AA_1 = 2A_1A_2 = 2 \cdot 12 = 24$ cm (statinio, esančio prieš 30° kampą, savybė).
Atsakymas. 12 cm ir 24 cm.



88. $S_{\text{šon.}} = 8 \cdot (3 + 4 + 5 + 4 + 3) = 152$ (cm²).

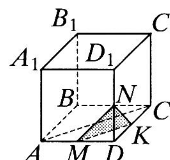
89. Stačiakampio gretasienio įstrižainės ilgį pažymėkime x. Tada:
a) $x = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9$;
b) $x = \sqrt{12^2 + 12^2 + 14^2} = 22$;
c) $x = \sqrt{8^2 + 9^2 + 12^2} = 17$.
Pastaba. Pravartu padaryti apibendrinančią išvadą: *Stačiakampio gretasienio, kurio matmenys yra a, b ir h, įstrižainės ilgis lygus* $\sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$. *Kubo, kurio briaunos ilgis yra a, įstrižainės ilgis lygus* $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

90. Tegu kubo briaunos ilgis yra a cm, o jo įstrižainės ilgis — x cm. Pagal sąlygą $6a^2 = 96$, $a = 4$ (cm). Tada $x = 4\sqrt{3}$ cm.

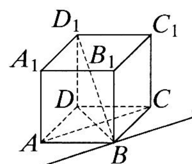
91. Tegu kubo briaunos ilgis yra a cm. Pagal sąlygą $a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, $a = 3$ cm.
$S_{\text{pav.}} = 6a^2 = 6 \cdot 3^2 = 54$ (cm²), $V = a^3 = 3^3 = 27$ (cm³).

92. Sakykime, kad kubo briaunos ilgis yra a cm. Trikampis AB_1C — lygiakraštis,
$S_{\triangle AB_1C} = \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.
Pagal sąlygą $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 32\sqrt{3}$. Iš čia $a = 8$.
Tada $S_{\text{pav.}} = 6a^2 = 6 \cdot 8^2 = 384$ (cm²) ir $V = a^3 = 8^3 = 512$ (cm³).

93. Per trijų kubo briaunų, išeinančių iš vienos viršūnės, vidurio taškus nubrėžus plokštumą, pjūvyje gaunamas lygiakraštis trikampis.
Sakykime, kad kubo briaunos ilgis yra x cm, o trikampio kraštinės ilgis — a cm.
Tada $a = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ (cm), $S_{\text{pjūvio}} = \frac{\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}x^2}{8}$ (cm²).
Pagal sąlygą $\frac{\sqrt{3}x^2}{8} = 2\sqrt{3}$, $x = 4$ cm.
Atsakymas. 4 cm.



94. Įrodysime, kad kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainė BD_1 yra statmena pagrindo $ABCD$ įstrižainei AC.
Per pagrindo viršūnę B brėžiame tiesę l, lygiagrečią pagrindo įstrižainei AC. $AC \perp BD$ — kvadrato įstrižainės. Kadangi $l \parallel AC$, tai ir $l \perp BD$. Pagal trijų statmenų teoremą, jei tiesė l statmena pasvirosios projekcijai DB, tai statmena ir pasvirajai D_1B. Tuomet tiesei l lygiagreti įstrižainė AC taip pat bus statmena pasvirajai D_1B. Taigi $BD_1 \perp AC$.



95. Kadangi $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — stačiakampis gretasienis ir $AB = AD$, tai $ABCD$ — kvadratas.

$A_1A \perp (ABD)$, tai A_1E — pasviroji, AE — pasvirosios projekcija.

Kadangi $BD \perp A_1E$, tai pagal trijų statmenų teoremą, $BD \perp AE$.

Stačiojo lygiašonio trikampio ABD aukštinė AE yra ir pusiaukraštinė, todėl $BE = ED = AE = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Tada $AA_1 = \sqrt{A_1E^2 - AE^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 6$.

Visos stačiakampio gretasienio briaunos lygios, vadinasi, jis yra kubas.

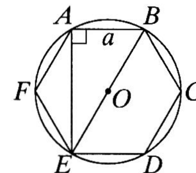
96. Prizmės pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus $\sqrt{100} = 10\,\text{cm}$, o pagrindo įstrižainės ilgis — $10\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Prizmės šoninės briaunos ilgis yra $\sqrt{15^2 - (10\sqrt{2})^2} = 5\,(\text{cm})$, o paviršiaus plotas lygus $4 \cdot 10 \cdot 5 + 2 \cdot 100 = 400\,(\text{cm}^2)$.

97. a) Apskaičiuokime taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ įstrižainių BE ir AE ilgius: $BE = a + a = 2a$, $AE = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.
Prizmės įstrižinių pjūvių plotai lygūs $2a \cdot a = 2a^2$ ir $a\sqrt{3} \cdot a = \sqrt{3}a^2$;

b) $S_{\text{šon.}} = 6a^2$, $S_{\text{pav.}} = 6a^2 + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 6a^2 + 3\sqrt{3}a^2 = 3a^2(2 + \sqrt{3})$;

c) $V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$.



98. Sakykime, kad pagrindo įstrižainių ilgiai yra $x\,\text{cm}$ ir $\sqrt{7}x\,\text{cm}$. Pagal lygiagretainio savybę $x^2 + (\sqrt{7}x)^2 = 2(16^2 + 30^2)$, $x = 17$.

Trumpesniosios pagrindo įstrižainės ilgis yra $17\,\text{cm}$, o mažesniojo įstrižinio pjūvio plotas lygus $17 \cdot 15 = 255\,(\text{cm}^2)$.

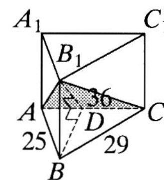
99. Taikydami Herono formulę, apskaičiuojame prizmės pagrindo plotą:
$S_{\triangle ABC} = \sqrt{45(45 - 36)(45 - 29)(45 - 25)} = 360\,(\text{cm}^2)$.

Brėžiame $BD \perp AC$ ir sujungiame B_1 su D. Pagal trijų statmenų teoremą $B_1D \perp AC$. Tada $BD = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 360}{36} = 20\,(\text{cm})$,

$B_1D = \sqrt{B_1B^2 + BD^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25\,(\text{cm})$,

$S_{\text{pjūvio}} = \frac{1}{2}AC \cdot B_1D = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 25 = 450\,(\text{cm}^2)$.

Atsakymas. $450\,\text{cm}^2$.



100. *I būdas.* Ilgesnioji gretasienio įstrižainė yra AC_1. Remdamiesi kosinusų teorema, apskaičiuojame BD: $BD^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 49$, $BD = 7$.

Remdamiesi lygiagretainio savybe, apskaičiuojame AC^2:
$AC^2 + 7^2 = 2(3^2 + 8^2)$, $AC^2 = 97$.

Iš stačiojo trikampio ACC_1: $CC_1 = \sqrt{15^2 - 97} = 8\sqrt{2}$.

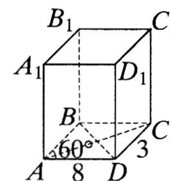
Tada $V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = 3 \cdot 8 \cdot \sin 60° \cdot 8\sqrt{2} = 96\sqrt{6}$.

II būdas. $ABCD$ — lygiagretainis, $\angle BAD = 60°$, tai $\angle ADC = 120°$.

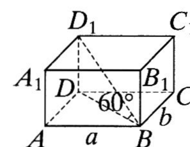
Remdamiesi kosinusų teorema, apskaičiuojame AC^2:
$AC^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 97$.

Toliau sprendžiame kaip I būde.

Atsakymas. $V = 96\sqrt{6}$.



101. $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\frac{DD_1}{BD} = \operatorname{tg} 60°$, $DD_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$;
$V = ab \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = ab\sqrt{3(a^2 + b^2)}$.

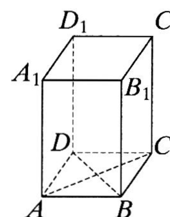


102. Trumpesnioji rombo $ABCD$ įstrižainė $BD = 12\,\text{cm}$.

a) $S_{\text{pagr.}} = \frac{V}{h} = \frac{1440}{15} = 96\,(\text{cm}^2)$.

b) Taikydami rombo ploto formulę randame ilgesniosios pagrindo įstrižainės ilgį: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AC$, $AC = \frac{2 \cdot 96}{12} = 16\,(\text{cm})$.
Kadangi rombo įstrižainės susikerta statmenai ir dalija viena kitą pusiau, tai $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,(\text{cm})$.

c) $S_{\text{šon.}} = 4 \cdot 10 \cdot 15 = 600\,(\text{cm}^2)$.



103. a) Gretasienio matmenis rasime išsprendę lygčių sistemą:

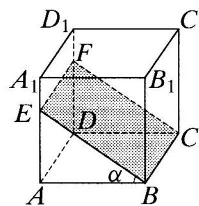
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2, \\ x^2 + z^2 = (3\sqrt{34})^2, \\ y^2 + z^2 = (3\sqrt{41})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 225, \\ x^2 + z^2 = 306, \\ y^2 + z^2 = 369. \end{cases}$$

Iš pirmųjų dviejų lygčių sumos atėmę trečiąją gauname:

$(2x^2 + y^2 + z^2) - (y^2 + z^2) = 162$, $x = 9$.

Tada $y = 12$ ir $z = 15$.

b) Gretasienio įstrižainės ilgis yra $\sqrt{15^2 + z^2} = \sqrt{15^2 + 15^2} = 15\sqrt{2}$.

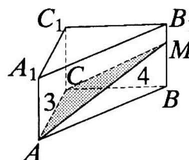


104. *I būdas.* Tegu $EB = x$. Tada $AE = \frac{x}{2}$, $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 12^2$, $x = 8\sqrt{3}$; $S_{\text{pjūvio}} = 12 \cdot 8\sqrt{3} = 96\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$.

II būdas. Remiamės teorema: *Daugiakampio statmenosios projekcijos plokštumoje plotas lygus projektuojamojo daugiakampio plotui, padaugintam iš kosinuso kampo tarp daugiakampio plokštumos ir jo projekcijos plokštumos.*

$S_{\text{proj.}} = S_{\text{daug.}} \cdot \cos\alpha$, $12^2 = S \cdot \cos 30°$, $S = \frac{144}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 96\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$.

Atsakymas. $96\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.



105. *I būdas.* Iš stačiojo trikampio ACB: $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,(\text{cm})$.

Trikampis CBM — status, $\angle MCB = 45°$, taigi $\triangle CBM$ — status lygiašonis ir $MB = BC = 4\,\text{cm}$, $CM = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Tada $S_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$.

II būdas. Remiamės 104 uždavinio sprendime suformuluota teorema:

$S_{\text{proj.}} = S_{\text{daug.}} \cdot \cos\alpha$, $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = S_{\text{daug.}} \cdot \cos 45°$, $S = \frac{6}{\cos 45°} = 6\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$.

Atsakymas. $6\sqrt{2}\,\text{cm}^2$.

18.2. Piramidės

Skyrelyje tik primenamos moksleiviams žinomos sąvokos ir formulės. Užtenka „perskaityti“ brėžinius ir versti kitą puslapį.

18.3. Briaunainių pjūviai

Vaizdus brėžinys — gera pagalba. Todėl prieš pradedant spręsti uždavinius apie sudėtingesnius erdvės kūnus, naudinga pasimokyti juos nubraižyti — geriau vėliau, negu niekada. Skyrelyje pateikti du pavyzdžiai — brėžimo uždaviniai. Galima pasiūlyti moksleiviams nubraižyti reikalingus pjūvius nežiūrint, kaip tai daroma vadovėlyje, o po to palyginti gautą brėžinį su vadovėlyje pateiktu.

18.4. Nupjautinės piramidės

Dar žiupsnelis žinių apie piramides. Užrašyta nupjautinės piramidės tūrio formulė. Jei kiltų klausimas, kaip galima ją įrodyti, atsakymo galima ieškoti pirmoje vadovėlio dalyje (140–141 psl.).

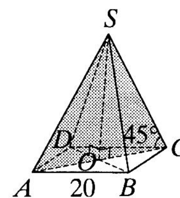
Žinome:
piramidės sąvoką;
nupjautinės pirmidės sąvoką;
paviršiaus ploto ir tūrio skaičiavimo formules.

Mokame:
braižyti piramides bei jų pjūvius;
skaičiuoti paviršiaus plotus, tūrius ir kt.

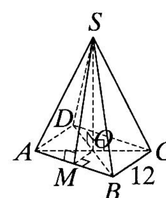
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Nebent 122–125 skyrelio uždaviniai gali atrodyti kiek sunkesni ar neįprasti. Kitus neturėtų būti sunku išspręsti nusibraižius aiškius brėžinius.

106. Įstrižinis pjūvis — lygiašonis $\triangle ASC$; SO — piramidės ir pjūvio aukštinė.
Iš stačiojo trikampio ABC: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}\,(\text{cm})$.
Kadangi $\angle SCO = 45°$, tai $SO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 20\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\,(\text{cm})$.
Tada $S_{\text{pjūvio}} = \frac{1}{2}AC \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 20\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 200\,(\text{cm}^2)$.

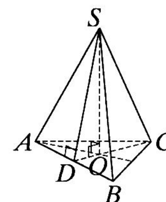


107. Brėžiame $SM \perp AB$ ir sujungiame piramidės aukštinės pagrindą O su tašku M.
Pagal trijų statmenų teoremą $OM \perp AB$.
$OM = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$, $SM = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
a) $S_{\text{šon.}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 240$;
b) $S_{\text{pav.}} = S_{\text{šon.}} + S_{\text{pagr.}} = 240 + 12^2 = 384$;
c) $V_{\text{pir.}} = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384$.

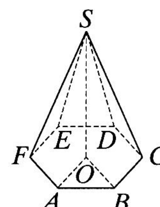


108. a) Piramidės šoninės sienos aukštinė yra $\approx \sqrt{216^2 - 112^2} = \sqrt{34\,112}\,(\text{m})$.
Tada $S_{\text{šon.}} \approx 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 224 \cdot \sqrt{34\,112} \approx 82\,743\,(\text{m}^2)$.
b) Piramidės pagrindo įstrižainės ilgis $\approx 224\sqrt{2}$ m, o piramidės aukštinės ilgis $\approx \sqrt{216^2 - (112\sqrt{2})^2} = \sqrt{21\,568}\,(\text{m})$. Tada
$V_{\text{pir.}} \approx \frac{1}{3} \cdot 224^2 \cdot \sqrt{21\,568} \approx 2\,456\,290\,(\text{m}^3)$.

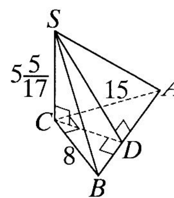
109. Pagal sąlygą $SO = 12\,\text{cm}$, $SD = 13\,\text{cm}$.
Iš stačiojo trikampio SOD: $OD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\,(\text{cm})$.
Pagrindo aukštinės trečdalis lygus 5 cm, taigi pagrindo aukštinė $CD = 15\,\text{cm}$.
Turime $\frac{AB\sqrt{3}}{2} = 15$, iš čia $AB = 10\sqrt{3}\,(\text{cm})$.
a) $S_{\text{šon.}} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 13 = 195\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$;
b) $S_{\text{pir.}} = 195\sqrt{3} + \frac{(10\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 270\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$;
c) $V_{\text{pir.}} = \frac{1}{3} \cdot 75\sqrt{3} \cdot 12 = 300\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$.



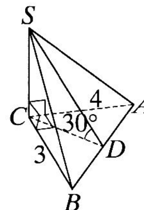
110. a) $V_{\text{pir.}} = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 48\sqrt{2}\,(\text{dm}^3)$;
b) $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 24\sqrt{3}$, $AB = 4\,\text{dm}$;
c) lygiakraščio trikampio AOB aukštinė lygi $\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,(\text{dm})$.
Piramidės apotema lygi $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2} = 6\,(\text{dm})$.
$S_{\text{šon.}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 72\,(\text{dm}^2)$.



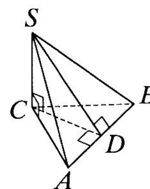
111. Brėžiame $CD \perp AB$ ir sujungiame taškus S ir D.
Pagal trijų statmenų teoremą $SD \perp AB$.
Iš stačiojo trikampio ABC: $AB = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17\,(\text{cm})$.
CD rasime iš lygybės: $CD \cdot AB = AC \cdot BC$, $CD = \frac{15\cdot 8}{17} = \frac{120}{17}$.
Tada $SD = \sqrt{\left(\frac{120}{17}\right)^2 + \left(5\frac{5}{17}\right)^2} = \frac{150}{17}\,(\text{cm})$ ir
$S_{\text{pir.}} = \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 5\frac{5}{17} + \frac{1}{2}\cdot 15 \cdot 5\frac{5}{17} + \frac{1}{2}\cdot 17 \cdot \frac{150}{17} + \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 15 = 195\frac{15}{17}\,(\text{cm}^2)$.
Atsakymas. $195\frac{15}{17}\,(\text{cm}^2)$.



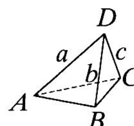
112. $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,(\text{cm})$.
CD rasime iš lygybės: $CD \cdot AB = AC \cdot BC$, $CD = \frac{3\cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$;
$SC = CD \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{12}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{5}\,(\text{cm})$; $SD = 2SC = \frac{8\sqrt{3}}{5}\,(\text{cm})$.
$S_{\text{šon.}} = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{34\sqrt{3}}{5}\,(\text{cm}^2)$.



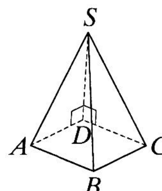
113. a) $V_{\text{pir.}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{13}}{12}$.
b) Brėžiame $CD \perp AB$ ir sujungiame taškus S ir D. Pagal trijų statmenų teoremą $SD \perp AB$. Lygiakraščio trikampio ABC aukštinė CD yra ir pusiaukraštinė, todėl $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Iš stačiojo trikampio SCD: $SD = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.
$S_{\text{pir.}} = 2 \cdot \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4+\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}a^2$.



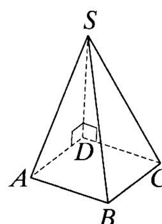
114. Kadangi $CD \perp AD$ ir $CD \perp BD$, tai $CD \perp (ABD)$. Piramidės pagrindu laikykime $\triangle ABD$. Tada piramidės aukštinė yra briauna CD.
$V_{\text{pir.}} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c = \frac{1}{6}abc$.



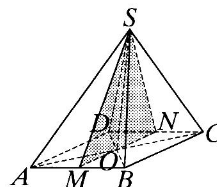
115. $ABCD$ — kvadratas, $AB = BC = CD = DA = 5\,\text{cm}$, $SD = 12\,\text{cm}$ — piramidės aukštinė.
$SC = SA = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\,(\text{cm})$; $S_{\triangle SDC} = S_{\triangle SDA} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30\,(\text{cm}^2)$;
$S_{\triangle SAB} = S_{\triangle SCB} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 5 = 32{,}5\,(\text{cm}^2)$; $S_{ABCD} = 5^2 = 25\,(\text{cm}^2)$.
$S_{\text{pir.}} = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 32{,}5 + 25 = 150\,(\text{cm}^2)$.



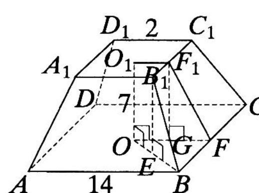
116. $S_{\text{šon.}} = S_{\triangle SDA} + S_{\triangle SDC} + S_{\triangle SCB} + S_{\triangle SAB}$.
Iš stačiojo trikampio SCD: $SC = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26\,(\text{cm})$.
Iš stačiojo trikampio SAB: $SA = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25\,(\text{cm})$.
$S_{\text{šon.}} = \frac{1}{2}(24 \cdot 7 + 24 \cdot 10 + 26 \cdot 7 + 25 \cdot 10) = 420\,(\text{cm}^2)$.

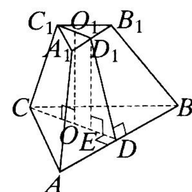


117. Lygūs trikampiai yra ir lygiapločiai, todėl:
$S_{\triangle SDA} = S_{\triangle SCB}$, $S_{\triangle SAM} = S_{\triangle SCN}$, $S_{\triangle SDN} = S_{\triangle SBM}$.
Šias lygybes panariui sudedame:
$S_{\triangle SDA} + S_{\triangle SAM} + S_{\triangle SDN} = S_{\triangle SCB} + S_{\triangle SCN} + S_{\triangle SBM}$.
Įrodėme, kad plokštuma SMN, einanti per piramidės aukštinę, padalijo piramidės šoninį paviršių į dvi lygiaplotes dalis.



118. a) Brėžiame $B_1E \perp OB$; $OB = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}\,(\text{cm})$; $O_1B_1 = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,(\text{cm})$;
$EB = 7\sqrt{2} - \sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,(\text{cm})$; $BB_1 = \sqrt{7^2 + (6\sqrt{2})^2} = 11\,(\text{cm})$.
b) Apskaičiuosime nupjautinės piramidės šoninės sienos aukštinę FF_1. Brėžiame $F_1G \perp OF$; $GF_1 = OO_1 = 7\,\text{cm}$, $GF = OF - O_1F_1 = 7 - 1 = 6\,(\text{cm})$;
$FF_1 = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}\,(\text{cm})$. Tada
$S_{\text{šon.}} = \frac{1}{2}(4 \cdot 14 + 4 \cdot 2) \cdot \sqrt{85} = \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot \sqrt{85} \approx 295\,(\text{cm}^2)$.
c) $V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}) = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot (14^2 + 2^2 + \sqrt{196 \cdot 4}) = 532\,(\text{cm}^3)$.
Pastaba. Kadangi tūris apskaičiuojamas tiksliai, tai sąlygoje nereikalingas nurodymas skaičiuoti $1\,\text{cm}^3$ tikslumu.





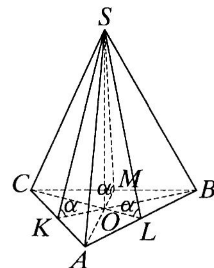
119. a) Brėžiame $CD \perp AB$ ir $C_1D_1 \perp A_1B_1$, $O \in CD$, $O_1 \in C_1D_1$. Sujungiame taškus D ir D_1. Iš taško D_1 brėžiame $D_1E \perp CD$. Pagal trijų statmenų teoremą $D_1D \perp AB$ ir yra nupjautinės piramidės šoninės sienos apotema.
$CD = \frac{60\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}\,(\text{cm})$, $C_1D_1 = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}\,(\text{cm})$;
$OD = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3} \cdot 30\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\,(\text{cm})$,
$O_1D_1 = \frac{1}{3}C_1D_1 = \frac{1}{3} \cdot 15\sqrt{3} = 5\sqrt{3}\,(\text{cm})$.
Tada $ED = OD - O_1D_1 = 10\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}\,(\text{cm})$.
Iš stačiojo trikampio DED_1: $DD_1 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10\,(\text{cm})$;
b) $S_{\text{šon.}} = \frac{1}{2}(3 \cdot 60 + 3 \cdot 30) \cdot 10 = 1350\,(\text{cm}^2)$;
c) $V = \frac{1}{3} \cdot 5\left(\frac{60^2\sqrt{3}}{4} + \frac{30^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{3600\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{900\sqrt{3}}{4}}\right) = 2625\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$.

120. Kadangi $1\,\text{dm}^3 = 1\,\ell$, tai akvariumo tūrį skaičiuojame matavimus išreiškę decimetrais.
$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (10^2 + 5^2 + \sqrt{100 \cdot 25}) = 350\,(\text{dm}^3) = 350\,\ell$.

121. Sprendžiame lygtį: $76 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (8 + S_2 + \sqrt{8S_2})$, $\sqrt{8S_2} = 30 - S_2$, iš čia $30 - S_2 > 0$, $S_2 < 30$;
$S_2^2 - 68S_2 + 900 = 0$, $S_2 = 18$ arba $S_2 = 50$ (netinka, nes $S_2 < 30$).
Taigi didesniojo pagrindo plotas lygus $18\,\text{m}^2$.

122. $V_{\text{pir.}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{pagr.}} \cdot H$;
$S_{\text{pagr.}} = \sqrt{54 \cdot (54 - 52)(54 - 29)(54 - 27)} = 270\,(\text{cm}^2)$.
Kadangi visi dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs, tai piramidės viršūnės S statmenoji projekcija į pagrindą yra taškas O, kuris yra į pagrindą įbrėžto apskritimo centras. Tada $OD = OE = r$ (įbrėžto apskritimo spindulys). Kadangi $S_{\text{pagr.}} = pr$, tai $r = \frac{270}{54} = 5\,(\text{cm})$, $SO = r \cdot \operatorname{tg} 60° = 5\sqrt{3}\,(\text{cm})$. Tada $V = \frac{1}{3} \cdot 270 \cdot 5\sqrt{3} = 450\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$.

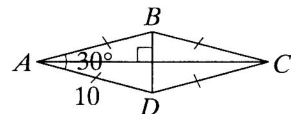
123. *Duota*: $SABC$ — taisyklingoji piramidė, $\angle SKO = \angle SLO = \angle SMO = \alpha$, $S_{\triangle ABC} = Q$.



Įrodyti: $S_{\text{šon.}} = \frac{Q}{\cos\alpha}$.
Įrodymas. I būdas. Piramidės šoninių sienų projekcijos pagrindo plokštumoje yra trikampiai AOB, BOC ir AOC, o šių trikampių sąjunga — trikampis ABC. Taikome daugiakampio statmenosios projekcijos ploto teoremą:
$S_{\text{proj.}} = S_{\text{daug.}} \cdot \cos\alpha$:
$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle SAB} \cdot \cos\alpha$, $S_{\triangle BOC} = S_{\triangle SBC} \cdot \cos\alpha$, $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle SAC} \cdot \cos\alpha$.
Sudėję lygybes panariui, gauname:
$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = (S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SAC})\cos\alpha$,
$Q = S_{\text{šon.}} \cdot \cos\alpha$, $S_{\text{šon.}} = \frac{Q}{\cos\alpha}$.
II būdas. Tegu pagrindo kraštinės ilgis yra a.
Kadangi $\triangle ABC$ — lygiakraštis, tai $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = Q$, $a = \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$;
$BK = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{Q}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{3}} = \sqrt{Q} \cdot \sqrt[4]{3}$, $KO = \frac{1}{3}BM = \frac{\sqrt{Q}\cdot\sqrt[4]{3}}{3}$;
$\frac{KO}{SK} = \cos\alpha$, $SK = \frac{2\sqrt{Q}\cdot\sqrt[4]{3}}{3\cos\alpha}$.
Tada $S_{\text{šon.}} = 3S_{\triangle ASC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt{Q}\cdot\sqrt[4]{3}}{3\cos\alpha} = \frac{Q}{\cos\alpha}$.

124. $32\,\text{cm}^2$. *Nurodymas.* Remkitės 123 uždavinyje įrodyta formule.

125. Rombas $ABCD$ — piramidės pagrindas.
$S_{\text{pagr.}} = 10^2 \sin 30° = 50\,(\text{cm}^2)$, $S_{\text{šon.}} = \frac{S_{\text{pagr.}}}{\cos 60°} = \frac{50}{\frac{1}{2}} = 100\,(\text{cm}^2)$,
$S_{\text{pir.}} = 100 + 50 = 150\,(\text{cm}^2)$.



19. SUKINIAI

Skyrius-žinynas, kuriame primenami sukinių apibrėžimai, paviršiaus plotų ir tūrių skaičiavimo formulės.

19.1. Ritinys

Tiesiog prisiminkime, kaip skaičiuojamas ritinio paviršiaus plotas, tūris...

Suvokiame ir žinome:

kaip gaunamas ritinys;
kaip atrodo „išklotas“ ritinio paviršius;
kaip skaičiuojamas ritinio plotas bei tūris.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelio uždaviniai trijų rūšių: paviršiaus ploto ir tūrio skaičiavimo (126–133, 135), pjūvio lygiagrečia ašiai plokštuma (134, 136,137), taikomojo pobūdžio (138, 139).

126. a) $S_{\text{šon.}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 14 = 280\pi$;
b) $S_{\text{rit.}} = S_{\text{šon.}} + 2S_{\text{pagr.}} = 280\pi + 2 \cdot 10^2 \cdot \pi = 480\pi$;
c) $V_{\text{rit.}} = S_{\text{pagr.}} \cdot h = 100\pi \cdot 14 = 1400\pi$.

127. Kadangi $2\pi rh = 24$, o $h = 2r$, tai $4\pi r^2 = 24$. Iš čia $\pi r^2 = 6\,\text{dm}^2$.

128. Kadangi kvadrato įstrižainės ilgis yra$10\sqrt{2}$, tai kvadrato kraštinės ilgis yra 10. Vadinasi, ritinio pagrindo spindulio ilgis yra 5, o aukštinės — 10. Tada:
a) $S_{\text{pjūvio}} = 10^2 = 100$;
b) $S_{\text{rit.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 5 \cdot (10 + 5) = 150\pi$;
c) $V_{\text{rit.}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi$.

129. Gautas kūnas yra ritinys, kurio $r = h = 5\,\text{dm}$. Tada:
a) $S_{\text{rit.}} = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 5) = 100\pi\ (\text{dm}^2)$;
b) $V_{\text{rit.}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 125\pi\ (\text{dm}^3)$.

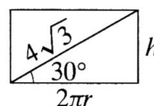
130. Ritinio aukštinės h ir pagrindo spindulio r ilgius randame iš lygčių sistemos:

$$\begin{cases} \pi r^2 = 64\pi, \\ 2rh = 320 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 8\,\text{cm}, \\ h = 20\,\text{cm}. \end{cases}$$

Tada:
a) $S_{\text{rit.}} = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 8 \cdot (20 + 8) = 448\,(\text{cm}^2)$;
b) $V_{\text{rit.}} = \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 1280\pi\ (\text{cm}^3)$.

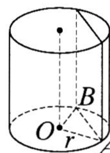
131. a) Ritinio pagrindo spindulio ilgį randame iš lygybės: $2\pi r = 4$, $r = \frac{2}{\pi}$ dm.
Tada $S_{\text{šon.}} = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 8 = 32\,(\text{dm}^2)$, $V_{\text{rit.}} = \pi \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot 8 = \frac{32}{\pi}\ (\text{dm}^3)$.
b) $2\pi r = 8$, $r = \frac{4}{\pi}$ dm;
$S_{\text{šon.}} = 2\pi \cdot \frac{4}{\pi} \cdot 4 = 32\,(\text{dm}^2)$, $V_{\text{rit.}} = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot 4 = \frac{64}{\pi}\ (\text{dm}^3)$.

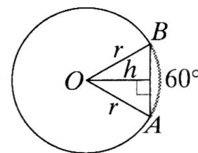
132. $h = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $2\pi r = 4\sqrt{3} \cdot \cos 30°$, $r = \frac{3}{\pi}$. Tada
$S_{\text{rit.}} = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} \cdot \left(2\sqrt{3} + \frac{3}{\pi}\right) = 12\sqrt{3} + \frac{18}{\pi}$.



133. $S_{\text{rit.}} = S_{\text{šon.}} + 2S_{\text{pagr.}}$, $S_{\text{pagr.}} = \frac{S_{\text{rit.}} - S_{\text{šon.}}}{2} = \frac{120\pi - 88\pi}{2} = 16\pi\ (\text{cm}^2)$.
Tada $\pi r^2 = 16\pi$, $r = 4\,\text{cm}$; $2\pi rh = 88\pi$, $h = \frac{88\pi}{2\pi \cdot 4} = 11\,(\text{cm})$;
$V_{\text{rit.}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 11 = 176\pi\ (\text{cm}^3)$.

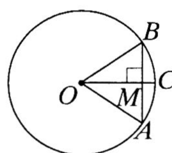
134. Trikampis AOB — lygiakraštis, kurio kraštinės lygios ritinio pagrindo spinduliui r. Šio trikampio aukštinė $h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Tada pagal sąlygą $\frac{r\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ ir $r = 10\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 20\,\text{cm}$.
a) $S_{\text{pjūvio}} = rh = 20 \cdot 30 = 600\,(\text{cm}^2)$;
b) $S_{\text{šon.}} = 2\pi \cdot 20 \cdot 30 = 1200\pi\ (\text{cm}^2)$;
c) $V_{\text{pir.}} = \pi \cdot 20^2 \cdot 30 = 12\,000\pi\ (\text{cm}^3)$.



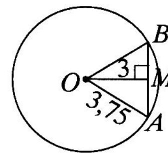


135. Pagal sąlygą $h = 3r$ ir $\pi r^2 h = 24\pi$. Vadinasi, $3\pi r^3 = 24\pi$, $r = 2\,\text{cm}$. Tada $h = 3 \cdot 2 = 6\,(\text{cm})$, $S_{\text{rit.}} = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 2 \cdot (6 + 2) = 32\pi\ (\text{cm}^2)$.

136. Pagal sąlygą $OA = OB = OC = r = 15\,\text{cm}$. Pjūvis yra kvadratas, kurio kraštinė $AB = 18\,\text{cm}$. Lygiašonio trikampio AOB aukštinė OM yra ir pusiaukraštinė, todėl $AM = BM = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9\,(\text{cm})$. Iš stačiojo trikampio AOM: $AM = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,(\text{cm})$.



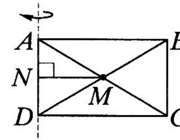
137. Kadangi ritinio aukštinė $h = 4$, o ašinio pjūvio plotas lygus 30, tai $2r \cdot 4 = 30$, $r = 3{,}75$. Iš stačiojo trikampio AOM: $AM = \sqrt{3{,}75^2 - 3^2} = 2{,}25$. Tada $AB = 2 \cdot 2{,}25 = 4{,}5$ ir $S_{\text{pjūvio}} = 4{,}5 \cdot 4 = 18$.



138. $S_{\text{rit.}} = 2\pi \cdot \frac{0{,}8}{2}\left(1{,}2 + \frac{0{,}8}{2}\right) = 1{,}28\pi\ (\text{m}^2)$.
Indui pagaminti sunaudota $1{,}13 \cdot 1{,}28\pi = 1{,}4464\pi \approx 4{,}54(\text{m}^2)$ skardos.

139. Ritinio pagrindo spindulio ilgis yra $r = 20 : 2 = 10\,(\text{cm})$, o tūris
$V_{\text{rit.}} = \pi \cdot 10^2 \cdot h = 100\pi h$.
Pagal sąlygą $100\pi h = 3500$ ($3{,}5\,\ell = 3{,}5\,\text{dm}^3 = 3500\,\text{cm}^3$).
Iš čia $h = \frac{3500}{100\pi} = \frac{35}{\pi} \approx 11{,}1\,(\text{cm})$.

140. Ritinio pagrindo spindulys $r = AB$, o ritinio aukštinė $h = BC$; $S_{ABCD} = rh$. Taško M brėžiamo apskritimo ilgis $C = 2\pi \cdot MN$. Kadangi $MN = \frac{r}{2}$, tai $C = 2\pi \cdot \frac{r}{2} = \pi r$ ir $V_{\text{rit.}} = \pi r^2 h = \pi r \cdot rh = C \cdot S$.



19.2. Kūgis

Ritinys yra „apvalusis“ taisyklingosios prizmės giminaitis, o kūgis — taisyklingosios piramidės. Štai kodėl tokios panašios šių briaunainių ir sukinių paviršiaus ir tūrio skaičiavimo formulės.

Suvokiame ir žinome:
kaip gaunamas kūgis (nupjautinis kūgis);
kūgio paviršiaus ploto ir tūrio formules.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

141–150 uždaviniai skirti kūgiui, 151–156 — nupjautiniam kūgiui.

141. a) $S_{\text{kūg.}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r) = \pi \cdot 30 \cdot (50 + 30) = 2400\pi$ (cm^2),
$V_{\text{kūg.}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 30^2 \cdot 40 = 12\,000\pi$ (cm^3);
b) $S_{\text{kūg.}} = \pi \cdot 120 \cdot (122 + 120) = 29\,040\pi$ (mm^2),
$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{122^2 - 120^2} = 22$ (mm),
$V_{\text{kūg.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 120^2 \cdot 22 = 105\,600\pi$ (mm^3);
c) $S_{\text{kūg.}} = \pi \cdot 4{,}8 \cdot (5{,}2 + 4{,}8) = 48\pi$ (dm^2), $h = \sqrt{5{,}2^2 - 4{,}8^2} = 2$ (dm),
$V_{\text{kūg.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}8^2 \cdot 2 = 15{,}36$ (dm^3).

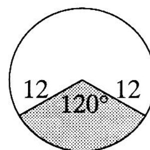
142. Kadangi $l = 26$ cm ir $\pi Rl = 260\pi$ cm^2, tai $26R = 260$, $R = 10$ cm. Tada:
a) $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ (cm);
b) $S_{\text{pagr.}} = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$ (cm^2);
c) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 24 = 800\pi$ (cm^3).

143. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgį pažymėkime a. Tada $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$, $a = 8$ dm; $2r = 8$, $r = 4$ dm. Kadangi kūgio aukštinė lygi ašinio pjūvio aukštinei, tai $h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ (dm).
Atsakymas. $r = 4$ dm, $h = 4\sqrt{3}$ dm.

144. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgį pažymėkime a.
Tada $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, $a = 12$ cm.
Vadinasi, $l = 12$ cm, $2r = 12$ ir $r = 6$ cm. Tuomet
$S_{\text{kūg.}} = \pi \cdot 6 \cdot (12 + 6) = 108\pi$ (cm^2), $V_{\text{kūg.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi$ (cm^3).

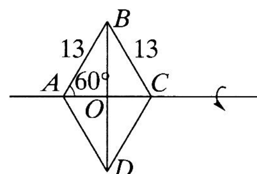
145. Kadangi $2\pi r = 50$ m, tai $r = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}$ (m) ir
$V_{\text{kūg.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{25}{\pi}\right)^2 \cdot 9 = \frac{1875}{\pi}$ (m^3).
Stirtoje esančio šieno masė lygi $\frac{1875}{\pi} \cdot 30 \approx 17\,914$ kg $\approx 17{,}9$ t.

146. Kūgio pagrindo spindulį randame iš proporcijos: $\frac{2\pi l}{2\pi r} = \frac{360^\circ}{120^\circ}$.
Kadangi $l = 12$ cm, tai $r = 4$ cm.
Tada $h = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$ (cm) ir $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 8\sqrt{2} = \frac{128\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm^3).



147. Iš proporcijos $\frac{2\pi l}{2\pi r} = \frac{4}{1}$ gauname, kad $l = 4r$.
Tada $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(4r)^2 - r^2} = r\sqrt{15}$ (cm).
Pagal sąlygą $r\sqrt{15} = 5\sqrt{15}$, $r = 5$ cm.
Tuomet $l = 4 \cdot 5 = 20$ (cm) ir $S_{\text{kūg.}} = \pi \cdot 5 \cdot (20 + 5) = 125\pi$ (cm^2).

148. Sukamas trikampis ABC yra lygiakraštis. Sukimosi kūną sudaro du lygūs kūgiai, turintys bendrą pagrindą, kurio skersmuo yra BD. Šių kūgių pagrindo spindulys $BO = \frac{13\sqrt{3}}{2}$ cm, o aukštinės $AO = CO = \frac{1}{2} \cdot 13 = 6{,}5$ (cm). Tada:
a) $S_{\text{suk.}} = 2\pi \cdot \frac{13\sqrt{3}}{2} \cdot 13 = 169\sqrt{3}\pi$ (cm^2);
b) $V_{\text{suk.}} = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi\left(\frac{13\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 6{,}5 = 549{,}25\pi$ (cm^3).

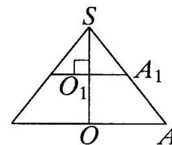


149. a) Pagal sąlygą $\pi rl + \pi r^2 = 24\pi$, $rl + r^2 = 24$.
Kadangi $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{r^2 + 4^2} = \sqrt{r^2 + 16}$, tai $r\sqrt{r^2 + 16} = 24 - r^2$.
Abi lygybės puses pakėlę kvadratu ir sutraukę panašiuosius narius, gauname:
$64r^2 = 576$, $r = 3$ cm. Tada $l = \sqrt{3^2 + 16} = 5$ (cm).
b) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (cm^3).
c) Šoninio paviršiaus išklotinės centrinį kampą α randame iš proporcijos:
$\frac{2\pi l}{2\pi r} = \frac{360^\circ}{\alpha}$, $\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{l} = \frac{360^\circ \cdot 3}{5} = 216^\circ$.

150. Iš trikampių panašumo: $\frac{r}{r_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{l}{l_1}$. Tada

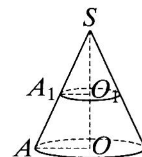
$\frac{S}{S_1} = \frac{\pi r l}{\pi r_1 l_1} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{l}{l_1} = \frac{h^2}{h_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}$, $\frac{V}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{h^3}{h_1^3} = \frac{r^3}{r_1^3}$.

151. Brėžinyje pavaizduotas kūgio ašinis pjūvis. Duota, kad $SO = H$. Pažymėkime $SO_1 = h$, $OA = R$, $O_1A_1 = r$, $SA = L$, $SA_1 = l$, S — duotojo kūgio šoninis paviršius, S_1 — atkirsto kūgio šoninis paviršius.
Iš trikampių SOA ir SO_1A_1 panašumo: $\frac{L}{l} = \frac{R}{r} = \frac{H}{h}$.
Vadinasi, $\frac{S}{S_1} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{2}{1}$. Iš čia $2h^2 = H^2$ ir $h = \frac{H\sqrt{2}}{2}$.



152. Kadangi atkirstas kūgis panašus į duotąjį, tai remiantis 150 uždaviniu $\frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{2}$ ir $\frac{r^3}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{1}{2}$, $r = 1$ m.

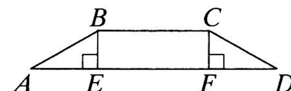
153. Pradinio kūgio tūrį pažymėkime V, o atkirstojo — V_1.
Kadangi šie kūgiai panašūs, tai $\frac{V}{V_1} = \frac{SO^3}{SO_1^3}$,
$V = \left(\frac{15}{0{,}6}\right)^3 \cdot 216 = 3\,375\,000\,\text{dm}^3 = 3375\,(\text{m}^3)$.



154. Duotojo kūgio šoninį paviršių pažymėkime S, aukštinę — h, o atkirsto kūgio — atitinkamai S_1 ir h_1. Kadangi šie kūgiai panašūs, tai $\frac{S}{S_1} = \frac{h^2}{h_1^2}$. Kadangi $h = 2h_1$, tai $S_1 = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 \cdot S = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 100 = 25\,(\text{cm})^2$. Tada nupjautinio kūgio šoninis paviršius lygus $100 - 25 = 75\,(\text{cm}^2)$.

155. a) $S_{\text{nupj.k.šon.}} = \pi(r + R)l = \pi \cdot (15 + 30) \cdot 25 = 1125\pi\ (\text{cm}^2)$;
b) $S_{\text{nupj.k.}} = S_{\text{šon.}} + \pi r^2 + \pi R^2 = 1125\pi + 225\pi + 900\pi = 2250\pi\ (\text{cm}^2)$;
c) $V_{\text{nupj.k.}} = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$;
$h = \sqrt{l^2 - (R - r)^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\,(\text{cm})$;
$V_{\text{nupj.k.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20 \cdot (225 + 450 + 900) = 10\,500\pi\ (\text{cm}^3)$.

156. Nupjautinio kūgio ašinis pjūvis — lygiašonė trapecija $ABCD$.
$BE = CF = \frac{1}{2}AB$ — trapecijos, taip pat ir nupjautinio kūgio, aukštinė.
$BC = 2r = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm, $AD = 2R = 2 \cdot 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$ cm,
$AE = \frac{14\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,(\text{cm})$; $BE = AE \cdot \text{tg}\,30° = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\,(\text{cm})$.
Tada $S_{\text{pjūvio}} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{6\sqrt{3} + 14\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 40\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$.



19.3. Rutulys. Sfera

Štai ir paskutinis kūnas — tobulai simetriškas, itin paprastas, tačiau kartu mįslingas — tikras visos matematikos simbolis. Skyrelyje surašytos rutulio ir jo išpjovų bei nuopjovų paviršiaus ploto ir tūrio skaičiavimo formulės.

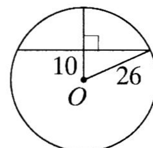
Žinome:
sferos paviršiaus ploto formulę;
rutulio tūrio formulę.

Mokame šias formules taikyti.

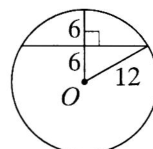
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelio uždaviniuose — vien rutuliai arba sferos. Uždavinių apie rutulius, įbrėžtus į briaunainius ar kūgius, rasite kartojimo skyriuje.

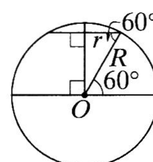
157. $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\,(\text{cm})$;
$S_{\text{pjūvio}} = \pi r^2 = \pi \cdot 24^2 = 576\pi\ (\text{cm}^2)$;
$S_{\text{sferos}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 26^2 = 2704\pi\ (\text{cm}^2)$;
$\frac{S_{\text{pjūvio}}}{S_{\text{sferos}}} = \frac{576\pi}{2704\pi} = \frac{36}{169}$.



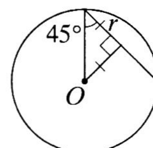
158. a) $r = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}\,(\text{cm})$; $S_{\text{pjūvio}} = \pi r^2 = (6\sqrt{3})^2\pi = 108\pi\ (\text{cm}^2)$;
b) $S_{\text{didž.skr.}} = \pi R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi\ (\text{cm}^2)$;
c) $V_{\text{rut.}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 2304\pi\ (\text{cm}^3)$.



159. a) Prieš 30° kampą esantis statinis lygus pusei įžambinės, todėl $r = \frac{1}{2}R$. Šios lygiagretės apskritimo ilgis lygus $2\pi r = 2\pi \cdot \frac{1}{2}R = \pi R$.
b) $\pi R : 24 \approx 6000 \cdot 3{,}14 : 24 = 785\,(\text{km})$.



160. $r^2 + r^2 = (16\sqrt{2})^2$, $r^2 = 256$; $S_{\text{pjūvio}} = \pi r^2 = 256\pi$.



161. Pažymėkime ritinio pagrindo spindulį $R = 16\,\text{cm}$, o patalpinto į indą rutulio spindulį $R_1 = 10\,\text{cm}$. Tada
$V_{\text{rit.}} = \pi R^2 H = 16^2\pi H = 256\pi H$, $V_{\text{rut.}} = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000\pi}{3}$,
$H = \frac{4000\pi}{3} : 256\pi = \frac{4000\pi}{3 \cdot 256\pi} \approx 5{,}2\,(\text{cm})$.

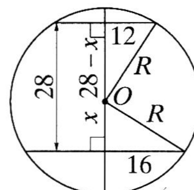
162. Iš sąlygos $4\pi R^2 = 144\pi$; iš čia $R = 6\,\text{cm}$. Tada $V_{\text{rut.}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi\ (\text{cm}^3)$.

163. Tegu pjūvis, kurio spindulys lygus 16 cm, nutolęs nuo sferos centro x cm atstumu. Tuomet kitas pjūvis nuo sferos centro bus nutolęs $(28 - x)$ cm atstumu. Atstumą x ir spindulį R rasime iš lygčių sistemos:

$$\begin{cases} x^2 + 16^2 = R^2, \\ (28 - x)^2 + 12^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - (28 - x)^2 + 16^2 - 12^2 = 0,$$

$28(2x - 28) + 28 \cdot 4 = 0$, $x = 12\,\text{cm}$;

$R^2 = 12^2 + 16^2$, $R = 20\,\text{cm}$.



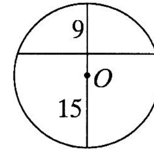
164. $S_{\text{pav.}} = 4\pi \cdot 12{,}5^2 = 625\pi\ (\text{cm})^2$. Siūlėms pridedama $625\pi \cdot 0{,}1 = 62{,}5\pi\ \text{cm}^2$ odos. Kamuoliui pasiūti reikės $625\pi + 62{,}5\pi = 687{,}5\pi \approx 2159\,(\text{cm}^2)$ odos.

165. Kūgio sudaromoji $l = 12\,\text{cm}$, o jo pagrindo spindulys $r = 6\,\text{cm}$.
$S_{\text{kūg.}} = \pi r(l + r) = \pi \cdot 6 \cdot (12 + 6) = 108\pi\ (\text{cm}^2)$, $S_{\text{rut.}} = 4\pi R^2$.
Pagal sąlygą $4\pi R^2 = 108\pi$, $R = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$.

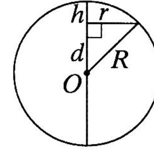
166. $V = \frac{4}{3}\pi R_1^3 - \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3) = \frac{4}{3}\pi(4{,}5^3 - 3{,}5^3) \approx 202\,(\text{cm}^3)$.
Rutulio masė lygi $202 \cdot 11{,}3 \approx 2283\,\text{g} \approx 2{,}28\,\text{kg}$.

167. Duotųjų rutulių spindulius pažymėkime R_1 ir R_2, o ieškomojo — R.
$\frac{4}{3}\pi R_1^3 + \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi(R_1^3 + R_2^3) = \frac{4}{3}\pi\left(3^3 + (3\sqrt[3]{3})^3\right) = 144\pi$ (dm^3).
Pagal sąlygą $\frac{4}{3}\pi R^3 = 144\pi$, iš čia $R^3 = 108$, $R = \sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$ (dm).

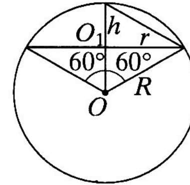
168. Rutulio spindulys $R = \frac{1}{2}(9 + 15) = 12$ (cm).
Kadangi $V_{\text{nuopj.}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, tai
$V_{\text{nuopj.1}} = \pi \cdot 9^2 \cdot \left(12 - \frac{1}{3} \cdot 9\right) = 729\pi$ (cm^3),
$V_{\text{nuopj.2}} = \pi \cdot 15^2 \cdot \left(12 - \frac{1}{3} \cdot 15\right) = 1575\pi$ (cm^3).



169. $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (dm); $h = R - d = 5 - 3 = 2$ (dm). Tada $V_{\text{nuopj.}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi \cdot 2^2 \cdot \left(5 - \frac{2}{3}\right) = \frac{52\pi}{3}$ (dm^3).



170. a) $OO_1 = \frac{1}{2}R$; $h = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ (cm).
$V_{\text{išpj.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi \cdot 30^2 \cdot 15 = 9000\pi$ (cm^3);
b) $V_{\text{nuopj.}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi \cdot 15^2 \cdot \left(30 - \frac{15}{3}\right) = 5625\pi$ (cm^3);
$r = R\sin 60° = 15\sqrt{3}$ (cm);
$V_{\text{kūgio}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (15\sqrt{3})^2 \cdot 15 = 3375\pi$ (cm^3);
$\frac{V_{\text{kūgio}}}{V_{\text{nuopj.}}} = \frac{3375\pi}{5625\pi} = 0{,}6.$



171. a) Mažesniosios rutulio nuopjovos tūrį pažymėkime V_1, o didesniosios — V_2.
Tada $V_1 = \pi \cdot 6^2 \cdot \left(9 - \frac{6}{3}\right) = 252\pi$ (cm^3), $V_2 = \pi \cdot 12^2 \cdot \left(9 - \frac{12}{3}\right) = 720\pi$ (cm^3);
b) $V_{\text{sluoksnio}} = V_2 - V_1 = 720\pi - 252\pi = 468\pi$ (cm^3).

20. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

Pastaba. Vadovėlyje pateikti neteisingi 6 ir 9 uždavinių atsakymai.

1. $\angle BAC = 90° - 60° = 30°$. Ritinio pagrindo spindulys $R = \frac{1}{2}AB = BC = 8$. Ritinio aukštinė lygi prizmės aukštinei, t. y. 16. Tada $V_{\text{rit.}} = \pi R^2 h = \pi \cdot 8^2 \cdot 16 = 1024\pi$.

2. Ritinio pagrindo spindulį pažymėkime R, o ritinio ir prizmės aukštinę — H. Tada $V_{\text{rit.}} = \pi R^2 H$.

a) Prizmės pagrindas — lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė $a_3 = R\sqrt{3}$, o plotas $S_3 = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Tada $V_{\text{priz.}} = S_3 H = \frac{3\sqrt{3}R^2 H}{4}$,
$\frac{V_{\text{priz.}}}{V_{\text{rit.}}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}R^2 H}{4}}{\pi R^2 H} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

b) Prizmės pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė $a_4 = R\sqrt{2}$, o plotas $S_4 = a_4^2 = 2R^2$. Tada $V_{\text{priz.}} = S_4 H = 2R^2 H$,
$\frac{V_{\text{priz.}}}{V_{\text{rit.}}} = \frac{2R^2 H}{\pi R^2 H} = \frac{2}{\pi}$.

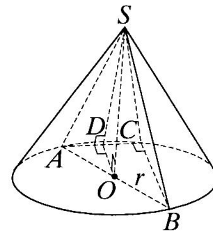
c) Prizmės pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinė $a_6 = R$, o plotas $S_6 = \frac{a_6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$. Tada $V_{\text{priz.}} = S_6 H = \frac{3\sqrt{3}R^2 H}{2}$,
$\frac{V_{\text{priz.}}}{V_{\text{rit.}}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}R^2 H}{2}}{\pi R^2 H} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

3. Kadangi prizmės pagrindas taisyklingasis šešiakampis, tai įbrėžto į šią prizmę ritinio pagrindo spindulys $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, o pagrindo plotas lygus $\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2\pi}{4}$. Ritinio aukštinę h randame iš lygybės $\frac{3a^2\pi}{4} \cdot h = \frac{3\pi a^3}{2}$, iš čia $h = 2a$. Tada $S_{\text{šon. rit.}} = 2\pi r h = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = 2\sqrt{3}\pi a^2$.

4. Prizmės pagrindas — kvadratas, kurio kraštinė $a = 2r$;
$V_{\text{priz.}} = (2r)^2 \cdot h = 4r^2 h$. Kadangi $V_{\text{rit.}} = \pi r^2 h = V$, tai $r^2 h = \frac{V}{\pi}$.
Tada $V_{\text{priz.}} = 4 \cdot \frac{V}{\pi} = \frac{4V}{\pi}$.

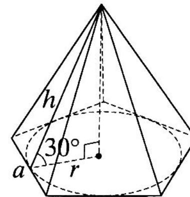
5. Kadangi prizmės pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinės ilgis yra 2 dm, tai $r = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (dm).
Tada $V_{\text{priz.}} = \pi r^2 h = \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 2 = 6\pi$ (dm^3).

6. Stačiojo lygiašonio trikampio įžambinė $AB = 2r$. Tada $AC = BC = \sqrt{2}r$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}r)^2 = r^2$. $OD = \frac{\sqrt{2}r}{2}$ — trikampio ABC vidurinė linija.
Iš stačiojo trikampio DOS: $SO = OD\,\text{tg}\,60° = \frac{\sqrt{2}r}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}r}{2}$.
Tada $V_{\text{pir.}} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3}r^2 \cdot \frac{\sqrt{6}r}{2} = \frac{\sqrt{6}r^3}{6}$.



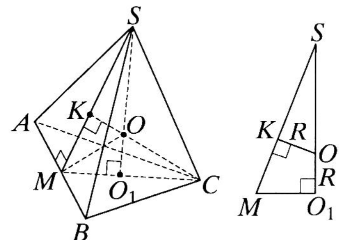
7. *I būdas.* $S_{\text{šon.}} = \frac{Q}{\cos\alpha}$; $Q = \frac{1}{2}ar \cdot 5 = \frac{5}{2}ar$ — piramidės pagrindo plotas.
$S_{\text{šon.}} = \frac{\frac{5}{2}ar}{\cos 30°} = \frac{\frac{5}{2}ar}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5ar}{\sqrt{3}}$.

II būdas. $S_{\text{šon.}} = \frac{1}{2}Ph = \frac{1}{2} \cdot 5ah = \frac{5}{2}ah$. Iš stačiojo trikampio: $\frac{r}{h} = \cos 30°$, $h = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Tada $S_{\text{šon.}} = \frac{5}{2}a \cdot \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{5ar}{\sqrt{3}}$.

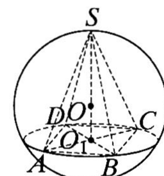


8. Tegu rutulio spindulys yra r. Tada $\frac{S_{\text{kubo}}}{S_{\text{rutulio}}} = \frac{6 \cdot (2r)^2}{4\pi r^2} = \frac{6}{\pi}$.

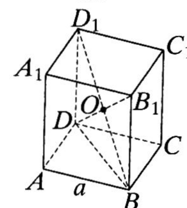
9. $SO_1 \perp (ABC)$, $CK \perp (ABS)$, $SO_1 \cap CK = O$ — įbrėžtinės sferos centras; $OO_1 = OK = R$.
Pažymėkime tetraedro briaunos ilgį a. Tetraedro apotema $CM = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tada $O_1M = KM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $SK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,
$SO_1 = \sqrt{SM^2 - O_1M^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
$\triangle SKO \backsim \triangle SO_1M$ — statieji trikampiai, turintys bendrą kampą.
Iš šių trikampių panašumo: $\frac{OK}{O_1M} = \frac{SK}{SO_1}$, $\frac{R}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}}$, $R = \frac{a}{2\sqrt{6}}$.
Tada $a = 2\sqrt{6}R$ ir $S_{\text{tetr.}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = a^2\sqrt{3} = (2\sqrt{6}R)^2 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}R^2$.



10. Taisyklingosios piramidės $SABCD$ pagrindo plokštumos ir sferos pjūvis yra apskritimas, apibrėžtas apie kvadratą $ABCD$. Piramidės aukštinės pagrindas yra to apskritimo centras O_1. Kadangi sferos centras O yra vienodai nutolęs nuo taškų A, B, C ir D, tai jis priklauso piramidės aukštinei SO_1.

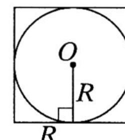


11. Tegu kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$ yra įbrėžtas į sferą. Sferos centras yra kubo įstrižainių susikirtimo taškas O. Kubo briaunos ilgį pažymėkime a. Tada kubo įstrižainės ilgis lygus $a\sqrt{3}$. Kadangi $a\sqrt{3} = 2R$, tai $a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Tada
$S_{\text{kubo}} = 6a^2 = 6 \cdot \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 = 8R^2$, $V_{\text{kubo}} = a^3 = \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$.



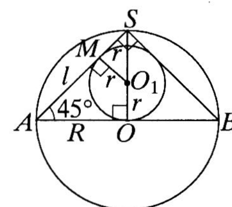
12. a) Ne į kiekvieną ritinį galima įbrėžti sferą. Tai galima padaryti tik tada, kai ritinio aukštinės ilgis lygus jo pagrindo skersmeniui.
b) *Nurodymas.* Nubraižykite kvadratą ir į jį įbrėžkite apskritimą.

13. Tegu rutulio spindulys ir ritinio pagrindo spindulys lygus R. Ritinio aukštinė lygi rutulio skersmeniui, t. y. $h = 2R$. Tada $S_{\text{sfer.}} = 4\pi R^2$,
$S_{\text{rit.}} = 2\pi R(h + R) = 2\pi R(2R + R) = 6\pi R^2$ ir $\frac{S_{\text{sfer.}}}{S_{\text{rit.}}} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3}$.
$V_{\text{rut.}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_{\text{rit.}} = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$ ir $\frac{V_{\text{rut.}}}{V_{\text{rit.}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$.
Taigi $\frac{S_{\text{sfer.}}}{S_{\text{rit.}}} = \frac{V_{\text{rut.}}}{V_{\text{rit.}}}$.



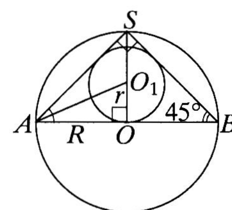
14. a) Sakome, kad sfera apibrėžta apie ritinį, jei ritinio pagrindai yra sferos apskritimai.
b) *Nurodymas.* Nubraižykite stačiakampį ir apie jį apibrėžkite apskritimą.

15. *I būdas.* Kadangi $\triangle ASB$ — lygiašonis ir $\angle A = \angle B = 45°$, tai $\angle ASB = 90°$. Taigi $\triangle ASB$ — status lygiašonis. Vadinasi, kūgio pagrindo centras yra apie kūgį apibrėžtos sferos centras O.
Tegu apibrėžtos sferos spindulys yra R, o įbrėžtos — r. Iš stačiojo lygiašonio trikampio ABS: $2AS^2 = (2R)^2$, $AS = R\sqrt{2}$. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys $r = \frac{AS+SB-AB}{2} = \frac{2 \cdot R\sqrt{2} - 2R}{2} = R(\sqrt{2} - 1)$.
Tada $S_{\text{sferos įbr.}} = 4\pi R^2(\sqrt{2} - 1)^2$, $S_{\text{sferos apibr.}} = 4\pi R^2$ ir
$\frac{S_{\text{sferos įbr.}}}{S_{\text{sferos apibr.}}} = \frac{4\pi R^2(\sqrt{2}-1)^2}{4\pi R^2} = 3 - 2\sqrt{2}$.

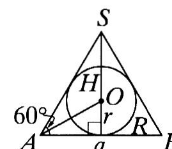


II būdas. Tegu apibrėžtos sferos spindulys yra R. Tada $S_{\text{sferos apibr.}} = 4\pi R^2$. Trikampis AOS — status lygiašonis, $AO = SO = R$, tai $l = R\sqrt{2}$. Kadangi $AM = R$ (iš vieno taško išeinančių apskritimo liestinių savybė), $MS = r$ ($\triangle SMO_1$ — status lygiašonis), tai $l = R+r$. Tada $R+r = R\sqrt{2}$, $r = R(\sqrt{2}-1)$ ir $S_{\text{sferos įbr.}} = 4\pi R^2(\sqrt{2} - 1)^2$; $\frac{S_{\text{sferos įbr.}}}{S_{\text{sferos apibr.}}} = \frac{4\pi R^2(\sqrt{2}-1)^2}{4\pi R^2} = 3 - 2\sqrt{2}$.

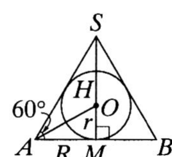
III būdas. $\angle ASB = 180° - (45° + 45°) = 90°$; $\angle SAO_1 = \angle O_1AO = \frac{45°}{2}$.
Iš stačiojo trikampio AOO_1: $r = R \operatorname{tg} \frac{45°}{2}$.
Tada $S_{\text{sferos apibr.}} = 4\pi R^2$, $S_{\text{sferos įbr.}} = 4\pi \cdot \left(R \operatorname{tg} \frac{45°}{2}\right)^2 = 4\pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{45°}{2}$ ir
$\frac{S_{\text{sferos įbr.}}}{S_{\text{sferos apibr.}}} = \frac{4\pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{45°}{2}}{4\pi R^2} = \operatorname{tg}^2 \frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$.



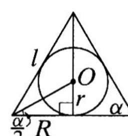
16. *I būdas.* $\triangle ASB$ — lygiakraštis, $r = 3$ dm, $a = 2r\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (dm).
Kūgio pagrindo spindulys $R = \frac{a}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (dm).
Kūgio aukštinė $H = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9$ (dm).
Tada $V_{\text{kūg.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(3\sqrt{3}\right)^2 \cdot 9 = 81\pi$ (dm^3).



II būdas. $\triangle ASB$ — lygiakraštis, AO — $\angle SAB$ pusiaukampinė, $\angle OAB = 30°$.
Iš stačiojo trikampio AMO: $\frac{r}{R} = \operatorname{tg} 30°$, $R = \frac{r}{\operatorname{tg} 30°} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\sqrt{3}$ (dm).
Iš stačiojo trikampio ASM: $SM = R \operatorname{tg} 60° = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$ (dm).
Tada $V_{\text{kūg.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot 9 = 81\pi$ (dm^3).



17. $R = l \cos\alpha$, $r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = l \cos\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
$V_{\text{rut.}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(l \cos\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi l^3 \cos^3\alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.





Leidinys parengtas pagal matematikos vadovėlį.
Visi uždaviniai perspręsti
leidyklos specialistų.

Šią mokytojo knygą rašė autorių kolektyvas: Antanas Skūpas, Eugenijus Stankus, Vladas Vitkus ir Vilius Stakėnas.

Knyga skiriama mokytojui, dėstančiam matematiką 12 klasėje pagal vadovėlį „Matematika 12, I ir II dalys“ bei atitinkamą uždavinyną.

Mokytojo knygos struktūra tokia pat kaip ir vadovėlio. Čia pateikiami:

- kiekvieno skyriaus ir skyrelio metodiniai nurodymai bei pastabos;
- uždavinių sprendimai, komentarai ir atsakymai.

Knyga naudinga ne tik mokytojams, bet ir moksleiviams bei jų tėvams...

Ir didieji aktoriai būna dėkingi sufleriams, kartais padedantiems išsisukti iš keblios padėties.

ISBN 9955-491-64-7
